Chapitre 7

QCM

1. B. FAUX. Une variable est aléatoire si toutes les valeurs possibles qu'elle peut prendre sont connues, mais qu'il n'est pas possible de savoir à l'avance quelle sera celle qu'elle prendra et qui sera donc réalisée. En revanche, la probabilité de chacune de ces valeurs possibles est connue.

2. B. FAUX. L'espérance donne la valeur moyenne des valeurs de la variable, pondérées par leur probabilité d'occurrence. Cela signifie que si l'expérience aléatoire était renouvelée une infinité de fois, la variable prendrait cette valeur espérée. Notons que ce nombre est un nombre théorique et que même si la variable ne peut prendre que des valeurs entières par exemple, l'espérance pourrait ne pas être un nombre entier.

3. B. FAUX. Les paramètres d'une loi binomiale sont n : le nombre de fois où une épreuve à une seule alternative est répétée, de façon indépendante, et p, la probabilité que l'événement qui nous intéresse soit effectivement réalisé au cours de l'épreuve. L'espérance de la variable est alors égale à $\mathrm{n} \times \mathrm{p}$ et l'écart-type à $\sqrt{\mathrm{n} \times \mathrm{p} \times (1-\mathrm{p})}$.

4. A. VRAI. Le paramètre de la loi de Poisson est le nombre k, qui est justement égal à l'espérance de la variable de Poisson X et à sa variance.

5. A. VRAI. Les deux paramètres de la loi normale coïncident justement avec l'espérance et l'écart-type de la variable.

6. B. C. Les fonctions mathématiques sont utilisées généralement pour les lois de probabilités discrètes théoriques, telles que la loi binomiale ou la loi de Poisson.

7. A. C. Les variables aléatoires continues prennent une infinité de valeurs discrètes. Pour travailler, il faut donc les définir sur des intervalles. La probabilité qu'une variable continue soit égale à une valeur particulière est quasiment nulle.

8. A. B. L'écart-type permet de caractériser la forme « plus ou moins pointue » de la courbe autour de la moyenne. Mais la symétrie se fait autour de la moyenne, qui est donc aussi la médiane.

9. C. Rappelons que la variance est égale à l'écart-type au carré. La notion d'élasticité n'est pas liée aux calculs statistiques.

10. C. Il est fortement conseillé de représenter ce qui est recherché sur un petit graphique sur une feuille de brouillon par exemple. Attention, la moyenne de la distribution est égale à 5, elle n'est donc pas symétrique par rapport à 0, comme la loi normale centrée réduite.

La symétrie s'effectue par rapport à m = 5, la deuxième propriété P(X ≥ a) = 1 – P(X < –a) est donc fausse, elle ne serait vraie que si la moyenne de la distribution était égale à 0.

P(X ≥ a) = 1 – P(X < a) est vrai, quelle que soit la nature de la loi, elle traduit le fait qu'un événement et son contraire ont des probabilités complémentaires à 1.

11. A. C. Il suffit d'appliquer la formule de la loi binomiale en remplaçant n par 50, x par 10 et p par 0,2. Le calcul effectué avec la calculatrice ou un tableur donne la valeur 0,0115, soit 1,15 %. Si l'opération, où l'événement E a 20 % de chances de survenir, est répétée 50 fois, il y a 1,15 % de chance, chaque fois, d'observer 10 réalisations de E.

12. B. C. Cette fois encore, il suffit d'appliquer la formule de la loi de Poisson en remplaçant k par 6 et x par 2. Le calcul effectué avec la calculatrice ou un tableur donne la valeur 0,0446, soit 4,46 %. Il y a donc 4,46 % de chances, si la variable X suit une loi de Poisson de paramètre 2, ce qui signifie aussi que son espérance est égale à 2, que l'événement E soit réalisé 6 fois.

13. C. Il suffit de construire un schéma pour s'en convaincre. Pour calculer les probabilités, il faut centrer et réduire.

$\mathrm{p}\{8 < \mathrm{X} < 10\} = \mathrm{p}\{\mathrm{X} < 10\} - \mathrm{p}\{\mathrm{X} \leq 8\} = \mathrm{p}\{\mathrm{T} < -2\} - \mathrm{p}\{\mathrm{T} \leq -2{,}4\} = (1 - \mathrm{p}\{\mathrm{T} \leq 2\}) - (1 - \mathrm{p}\{\mathrm{T} < 2{,}4\})$

$= \ 0{,}0228 - 0{,}0082.$

14. C. Rappelons la propriété de l'écart-type d'une fonction de type aX + b (fonction affine de X) :

$\sigma(\mathrm{aX} + \mathrm{b}\,) = |a|\sigma(\mathrm{X}\,)$, en effet, b est une constante, et n'a donc pas de dispersion puisqu'elle ne varie pas.

$\sigma(2\mathrm{X} + 5) = 2\sigma(\mathrm{X}\,) = 2 \times 3 = 6.$

15. C. Rappelons la propriété de l'écart-type d'une différence de variables aléatoires indépendantes :

$\sigma(\mathrm{aX} + \mathrm{bY}\,) = \sqrt{\left(a \times \sigma(\mathrm{X}\,)\right)^2 + \left(b \times \sigma(\mathrm{Y}\,)\right)^2}$ et donc $\sigma(5\mathrm{X} - 2\mathrm{Y}\,) = \sqrt{(5 \times 3)^2 + (2 \times 4)^2} = 17$. Notons que les dispersions s'ajoutent toujours.

Exercices

EXERCICE 1 DISCRETO

1. Déterminer la probabilité qu'une pièce prélevée aléatoirement dans la production soit défectueuse.

Si 5 % des pièces sont défectueuses dans la production, la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard soit défectueuse est égale à 5 %.

2. Déterminer, si un contrôle qualité est effectué sur des échantillons de 40 pièces A, la probabilité que 3 pièces soient défectueuses dans un échantillon prélevé ; déterminer la proportion d'échantillons contenant seulement 2 pièces défectueuses ou moins ; déterminer le nombre moyen de pièces défectueuses par échantillon

Identification de la loi de probabilité :

Un échantillon de 40 pièces est prélevé.

La même épreuve est renouvelée 40 fois : prélever une pièce, et regarder son état.

Il s'agit d'une épreuve à une seule alternative : la pièce est défectueuse ou non.

Les épreuves sont indépendantes : la probabilité que la pièce soit défectueuse est égale à 5 %, quel que soit le rang de la pièce de l'échantillon prélevé.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès (la pièce est défectueuse) parmi les 40 épreuves suit donc une loi binomiale de paramètres n = 40 et p = 0,05.

$$X \to \mathcal{B}(40\,;0{,}05)$$

La probabilité de compter 3 pièces défectueuses parmi les 40 de l'échantillon est égal à :

$$p\{X = 3\} = C_{40}^{3} \times 0{,}05^{3} \times 0{,}95^{37} = 0{,}1851$$

Il y a donc 18,5 % de chances, lorsqu'un échantillon est prélevé dans la production qu'il contienne 3 pièces défectueuses, soit encore 18,5 % des échantillons qu'il est possible de prélever contiennent 3 pièces défectueuses.

Il faut déterminer la proportion d'échantillons comptant 2 pièces défectueuses ou moins, ce qui revient à calculer la probabilité qu'un échantillon contienne 2 pièces défectueuses ou moins.

$$p\{X \leq 2\} = p\{X = 0\} + p\{X = 1\} + p\{X = 2\}$$

$$p\{X \leq 2\} = C_{40}^{0} \times 0{,}05^{0} \times 0{,}95^{40} + C_{40}^{1} \times 0{,}05^{1} \times 0{,}95^{39} + C_{40}^{2} \times 0{,}05^{2} \times 0{,}95^{38}$$

$$p\{X \leq 2\} = 0{,}1285 + 0{,}2706 + 0{,}2777 = 0{,}6767$$

Plus de 2/3 des échantillons contiennent donc 2 pièces défectueuses ou moins.

Le nombre moyen de pièces défectueuses dans l'échantillon est égal à l'espérance mathématique de la variable X. Or X suit une loi binomiale $X \to \mathcal{B}(40\,;0{,}05)$, il n'est donc pas nécessaire de reprendre la formule générale de l'espérance (ce serait d'ailleurs très long), celle-ci ne dépend que des paramètres de la loi.

$$E(X) = n \times p = 40 \times 0{,}05 = 2$$

Il y a donc, en moyenne, 2 pièces défectueuses par échantillon.

3. Déterminer, lorsque 6 échantillons sont prélevés au cours d'une journée, la probabilité de compter 18 pièces A défectueuses au total.

Intéressons-nous aux 6 échantillons de 40 pièces prélevées dans la journée.

Attention, la variable aléatoire a changé !

Le nombre total Y de pièces défectueuses prélevées dans la journée, pour les mêmes raisons que dans la question précédente, suit également une loi binomiale de paramètres $n = 40 \times 6 = 240$ et $p = 0{,}05$:

$$Y \to \mathcal{B}(240\,;0{,}05)$$

Il faut calculer $p\{Y = 18\} = C_{240}^{18} \times 0{,}05^{18} \times 0{,}95^{222} = 0{,}0245$

La probabilité est donc faible (2,45 %) de mesurer 18 pièces défectueuses au total dans les échantillons prélevés dans la journée.

4. Calculer approximativement la probabilité de compter 20 pièces défectueuses ou plus dans les 6 échantillons prélevés lors du contrôle qualité d'une journée.

Cette fois encore, les paramètres de la loi binomiale ont changé :

Soit Z nombre de succès parmi les $6 \times 150 = 900$ épreuves, suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0{,}01$.

$$Z \to \mathcal{B}(900\,;0{,}02)$$

Il faut calculer $p\{Z \geq 20\}$. Cette probabilité est longue à calculer, même en passant par la probabilité de l'événement contraire mais l'énoncé ne demande qu'une valeur approximative.

Il faut donc vérifier si les conditions d'approximation de la loi binomiale par une autre loi de probabilité sont satisfaites : $\begin{cases} n = 900 \geq 30 \\ E(Z) = n \times p = 900 \times 0{,}02 = 18 \geq 10 \\ V(Z) = n \times p \times (1 - p) = 900 \times 0{,}02 \times 0{,}98 = 17{,}64 \geq 5 \end{cases}$

Puisque c'est le cas,

$$Z \xrightarrow[approximativement]{} \mathcal{N}\left(18\,;\ \sqrt{17{,}64}\ =\ 4{,}2\right)$$

Il est maintenant rapide de calculer $p\{Z \geq 20\}$ avec la loi normale :

$$p\{Z \geq 20\} = p\left\{\frac{Z-18}{4{,}2} \geq \frac{20-18}{4{,}2}\right\} = p\{T \geq 0{,}48\} = 1 - \ p\{T < 0{,}48\} = 1 - 0{,}6844 = 0{,}3156$$

Il y a donc environ 31 % de chances de compter 20 pièces défectueuses sur les 6 échantillons prélevés.

EXERCICE 2 PÉCHU

1. Calculer la probabilité de compter 6 défectuosités dans un rouleau de câble.

Pour calculer cette probabilité, il faut d'abord identifier la loi suivie par X, le nombre de défectuosités par rouleau de 200 m de câble.

L'énoncé précise qu'il s'agit d'une distribution de Poisson, il suffit donc de déterminer son paramètre k.

Or, pour une variable de Poisson, l'espérance mathématique est égale au paramètre. Ici : $E(X) = 5$ puisqu'il y a en moyenne 5 défectuosités par rouleau et donc $k = 5$

Finalement $X \rightarrow \mathcal{P}(k = 5)$

$$p\{X = 6\} = \frac{e^{-5} \times 5^6}{6\,!}\ =\ 0{,}1462$$

Il y a donc presque 15 % de chances qu'il y ait 6 défectuosités dans le rouleau de câble alors qu'un rouleau, en moyenne, en a 5.

2. Calculer approximativement la probabilité de compter moins de 350 défectuosités dans la commande expédiée si la société reçoit une commande de 80 rouleaux de câble par un armateur.

X : nombre de défectuosités par rouleau suit toujours la même loi.

$$X \rightarrow \mathcal{P}(k = 5)$$

Intéressons-nous maintenant aux 80 rouleaux de la commande.

Soit Y le nombre total de défectuosités observées sur les 80 rouleaux de la commande.

Y est la somme de 80 variables aléatoires indépendantes de Poisson, elle suit donc une loi de Poisson également : il y a en moyenne 400 défectuosités sur les 80 rouleaux de la commande.

$$Y \rightarrow \mathcal{P}(k = 400)$$

Il faut maintenant calculer $p\{Y < 350\}$.

Cette probabilité est très longue à calculer avec la loi de Poisson, mais l'énoncé demande une approximation de cette probabilité. Il faut donc vérifier s'il est ou non possible d'utiliser une loi approximative étant donné la valeur du paramètre de la loi.

$Y \rightarrow \mathcal{P}(k = 400)$, $k \geq 15$, et donc :

$$Y \xrightarrow[approximativement]{} \mathcal{N}\left(400\,;\sqrt{400}\ =\ 20\right)$$

Il est maintenant rapide de calculer $p\{Y \geq 1000\}$ avec la loi normale :

$$p\{Y < 350\} = p\left\{\frac{Z - 400}{20} < \frac{350 - 400}{20}\right\} = p\{T < -2{,}5\} = 1 - p\{T \leq 2{,}5\} = 1 - 0{,}9938$$

$= 0{,}0062$

Cet événement est donc très peu probable (moins de 1 % de chance d'être réalisé).

3. En admettant que le patron d'un chalutier achète 50 mètres de câble, calculer la probabilité de ne compter aucune défectuosité dans son achat.

La longueur achetée par le patron du chalutier est de 50 m. Le nombre de défectuosités Z observées pour les 50 m achetés suit une loi de Poisson mais de paramètre $k = \frac{5 \times 50}{200} = 1{,}25$.

$$Z \to \mathcal{P}(k = 1{,}25)$$

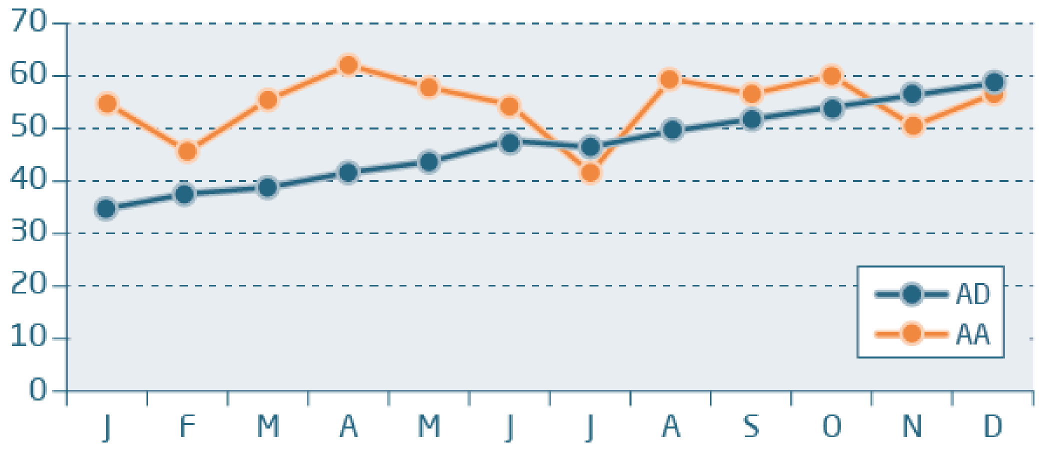
$$p\{Z = 0\} = \frac{e^{-1{,}25} \times 1{,}25^0}{0\,!} = 0{,}2865$$

Il y a donc seulement 28,65 % de chances qu'il n'y ait aucune défectuosité dans la longueur de câble achetée par le patron du chalutier.

CORRIGÉ

EXERCICE 3 DO-MI-SI-LA-DO-RÉ

1. Représenter graphiquement la distribution des ventes des deux services sur un même graphe.



2. Calculer la moyenne et l'écart-type de chacune de ces séries.

La calculatrice (ou un tableur) nous fournit les valeurs suivantes :

$m_{AD} = 47$; $m_{AA} = 55$; $\sigma_{AD} = 7{,}257$; $\sigma_{AA} = 5{,}972$

3. Rédiger une courte note expliquant si l'on peut envisager de considérer que les ventes de ces deux services suivent toutes deux des lois normales.

Les services d'aide à domicile (AD) connaissent manifestement une croissance régulière. Il ne serait pas pertinent d'utiliser une loi normale pour estimer ces ventes qui ne semblent pas du tout aléatoires. Au contraire, il paraît plus judicieux de faire une régression linéaire (voir chapitre 6).

En ce qui concerne les ventes de services d'aide à l'autonomie (AA), l'évolution est plus difficile à analyser. Il y a des variations assez importantes, même si sur l'ensemble de la période, le niveau des ventes semble osciller autour de la valeur moyenne de 55. Si nous disposions de plusieurs années, nous pourrions déterminer si ces fluctuations sont saisonnières ou pas. L'utilisation d'une loi normale pour calculer la probabilité d'obtenir un certain volume de ventes ne semble pas incongrue dans le cadre des services AA.

4. En admettant que le nombre de services AA délivrés mensuellement suive une loi normale, déterminer les paramètres de cette loi. Déterminer alors la probabilité que le nombre de services AA délivrés en janvier N+1 soit supérieur à 55, la probabilité que le nombre de services AA délivrés en janvier N+1 soit compris entre 50 et 60, la probabilité que le nombre de services AA soit pire qu'en février N.

Si les ventes (V) de services AA sont estimées par une loi normale, alors cette loi se caractérise par les deux paramètres m et σ calculés précédemment. Donc $V \to N(55 ; 5{,}972)$.

Soit $T = (V - 55) / 5{,}972$ alors $T \to N(0, 1)$

$P(V > 55) = 50\ \%$ (inutile de lire la table de la loi centrée réduite pour savoir que la probabilité de vendre plus que la moyenne est égale à 50 % car la loi normale est symétrique).

$P(50 < V < 60)$

$= P((50 - 55) / 5{,}972 < T < (60 - 55) / 5{,}972)$

$= P(-0{,}83724 < T < 0{,}83724)$

$= P(T < 0{,}83724) - P(T \leq -0{,}83724)$

$= P(T < 0{,}83724) - [1 - P(T < 0{,}83724)] \approx 0{,}7995 - [1 - 0{,}7995]$

À noter que l'on peut utiliser indifféremment 0,7995 ou 0,7967 car le tableau ne fournit que les valeurs de $t = 0{,}83$ ou $t = 0{,}84$. On est quand même plus près de 0,84 et la consigne est toujours de se placer au plus près.

$P(50 < V < 60) \approx 0{,}599$ soit près de 60 %.

En février, les ventes étaient de 45. La probabilité de vendre moins qu'en février est donc :

$P(V < 45) = P(T < (45 - 55) / 5{,}972)$

$= P(T < -1{,}6745)$

$= 1 - P(T \leq 1{,}6745) \approx 1 - 0{,}9525$ (ou 0,9535).

La probabilité de faire pire qu'en février est donc de l'ordre de 5 %.

