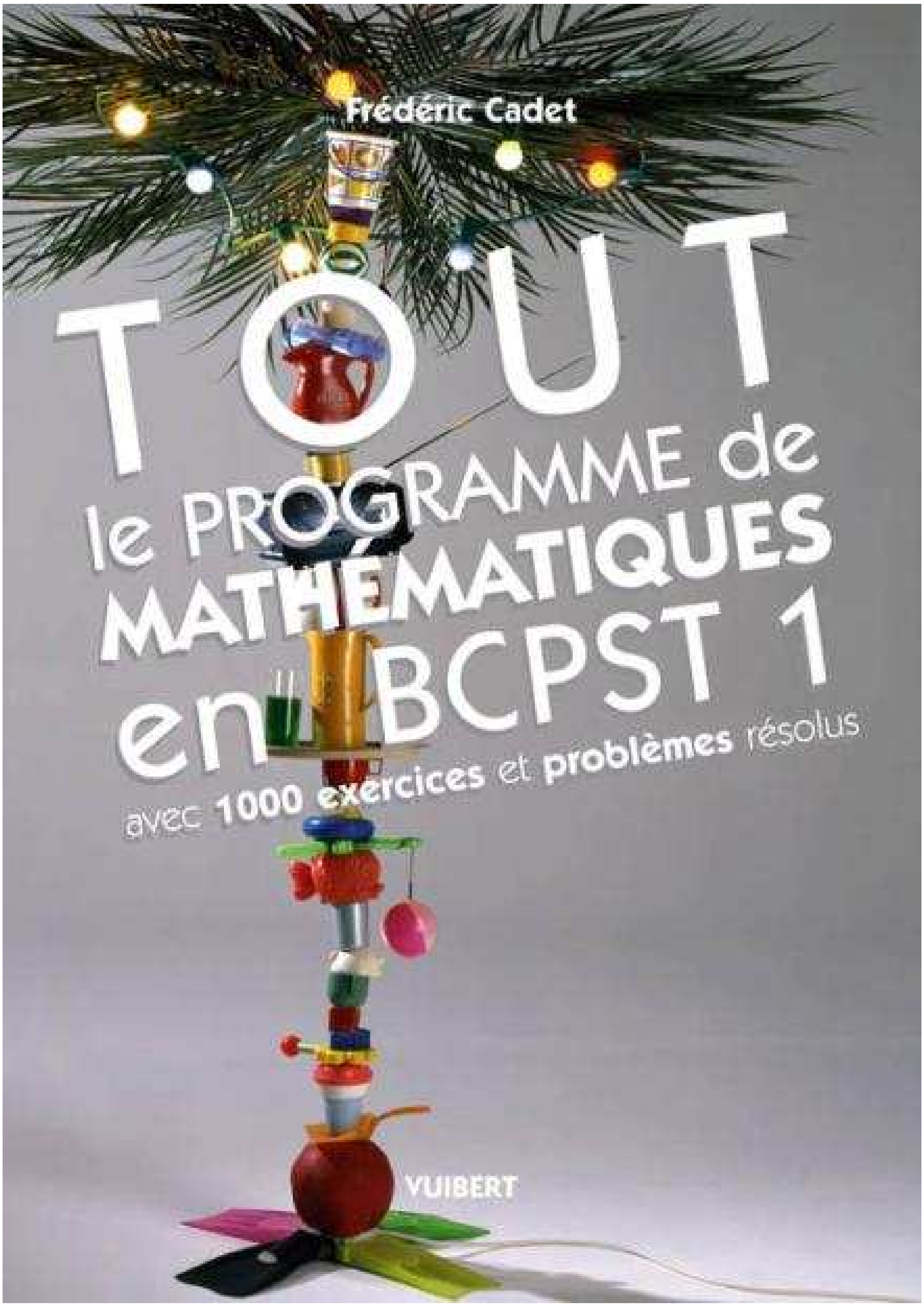
Corrigés des exercices du livre :



(ISBN 978-2-7117-4029-1)

Table des exercices et problèmes corrigés

Chapitre 1

Chapitre 2

Chapitre 3

Chapitre 4

Chapitre 5

Chapitre 6

Chapitre 7

Chapitre 8

Chapitre 9

Chapitre 10

Chapitre 11

Chapitre 12

Solutions des exercices du chapitre 1

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.1

1. $x \geqslant 0 \Rightarrow x > 1$ faux (pour $x = 0$ par exemple)
2. $x > 1 \Rightarrow x \geqslant 0$ vrai pour tout x
3. $x \geqslant 0 \Rightarrow x \neq 0$ faux (pour $x = 0$)
4. $x \geqslant 0 \Leftrightarrow x < 1$ faux (pour $x = 0$ par exemple)

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.2

1. $\forall x \in A,\ x \in B$
2. $(\forall x \in A,\ x \in B)$ et $(\forall x \in B,\ x \in A)$
3. $\exists x, y, z \in \mathbb{R}^*,\ xyz = 1$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \Leftrightarrow x < 0$ ou $x > 0$
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p, q, r, s \in \mathbb{N},\ n = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$ [4]
6. $\forall n \in \{3, 4, \dots\}, \forall x, y, z \in \mathbb{N}^*,\ x^n + y^n \neq z^n$ [5]

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.3

Négation de la phrase :

La négation de “Tous les habitants de la rue Pirandello qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans.” est “Il y a des habitants de la rue Pirandello qui ont les yeux bleus, mais qui ne gagneront pas au loto ou bien prendront leur retraite après 50 ans.”

Modélisation :

Soit H l'ensemble des habitants de la rue Pirandello qui ont les yeux bleus, G l'ensemble des gagnants au loto et R l'ensemble des personnes qui prendront leur retraite avant 50 ans. La phrase signifie alors

$$\boxed{\forall h \in H,\ h \in G \cap R,}$$

soit encore : $\boxed{H \subset G \cap R.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.4

- ”Pour tout entier p et tout entier a, $a^p - a$ est divisible par p” [6]
- ”L'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle lorsque le discriminant $b^2 - 4ac$ est strictement négatif.”

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.5

De $\overline{X} = \emptyset$ et $\overline{\emptyset} = X$ on déduit :

1. $X \cap \overline{\emptyset} = X \cap X = X$
2. $\overline{X} \cap \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$
3. $\overline{X \cap \emptyset} = \overline{\emptyset} = X$
4. $X \cup \overline{\emptyset} = X \cup X = X$
5. $\overline{\overline{X} \cap \emptyset} = \overline{\emptyset \cap \emptyset} = \overline{\emptyset} = X$
6. $\overline{\overline{X} \cup \emptyset} \cap \overline{\overline{X}} = \overline{\emptyset \cup \emptyset} \cap \overline{\emptyset} = \overline{\emptyset} \cap X = X \cap X = X.$

[4]Cette relation s'appelle le théorème des quatre carrés
[5]Cette relation constitue le grand théorème de Fermat, complètement démontré en 1996
[6]Cette relation est le petit théorème de Fermat

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.6

1. **Si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cap C = X$:**
   Si un élément x de X n'appartient pas à A ou à C alors il n'appartient pas à $A \cap C$. Comme $A \cap C = X$ il faut donc que $\boxed{A = C = X.}$ Alors $\emptyset = A \cap B = X \cap B = B$ soit $\boxed{B = \emptyset.}$
2. **Si $A \cap B \cap C = \emptyset$ et $A \cap C = X$:**
   Par un raisonnement analogue on obtient : $\boxed{A = C = X \text{ et } B = \emptyset.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.8

D'après la relation $\boxed{\overline{S \cap T} = \overline{S} \cup \overline{T}}$ — appliquée plusieurs fois, là où le signe $\cap$ est souligné — on calcule :

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\overline{\overline{A}\underline{\cap}B} \cap C} \cap \overline{\overline{D}\underline{\cap}\overline{\overline{A} \cap \overline{C}}}} &= \overline{\overline{(A \cup \overline{B}) \cap C}\underline{\cap}(D \cup (\overline{A} \cap \overline{C}))} \\
&= ((A \cup \overline{B}) \cap C) \cup (\overline{D} \cap \overline{\overline{\overline{A}\underline{\cap}\overline{C}}}) \\
&= ((A \cup \overline{B}) \cap C) \cup (\overline{D} \cap (A \cup C))
\end{aligned}$$

En utilisant la distributivité de l'intersection sur la réunion, *i.e.* $\boxed{S \cap (T \cup U) = (S \cap T) \cup (S \cap U),}$ on a :

$$\begin{aligned}
((A \cup \overline{B}) \cap C) \cup (\overline{D} \cap (A \cup C)) &= (A \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (\underbrace{\overline{D} \cap A}_{=\emptyset}) \cup (\overline{D} \cap C) \\
&= (A \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (\overline{D} \cap C) \\
&= (A \cup \overline{B} \cup \overline{D}) \cap C \quad \text{d'après la distributivité} \\
&= X \cap C \qquad \text{car } A \cup \overline{D} = X \\
&= C
\end{aligned}$$

En conclusion $\boxed{\text{l'ensemble recherché est } C.}$

NB : il est possible de simplifier autrement en remarquant que les conditions

$$A \cup \overline{D} = X \text{ et } A \cap \overline{D} = \emptyset$$

signifient que $\boxed{A = D.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.9

5. **Relation $(\overline{\overline{A} \cup \overline{D} \cup C} \cup (A \cap (\overline{B \cup C}))) \cap (\overline{(A \cap \overline{C} \cap D) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C})}) = \emptyset$:**

$$\begin{aligned}
& (\overline{\overline{A} \cup \overline{D} \cup C} \cup (A \cap (\overline{B \cup C}))) \cap (\overline{(A \cap \overline{C} \cap D) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C})}) \\
= \; & \left[(A \cap D \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C})\right] \cap \left[(\overline{A} \cup C \cup \overline{D}) \cap (\overline{A} \cup B \cup C)\right] \\
= \; & \left[\underbrace{(A \cap D \cap \overline{C}) \cap (\overline{A} \cup C \cup \overline{D})}_{=\emptyset} \cap (\overline{A} \cup B \cup C)\right] \cup \left[(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cap (\overline{A} \cup C \cup \overline{D}) \cap (\overline{A} \cup B \cup C)\right] \\
= \; & \underbrace{(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cap (\overline{A} \cup B \cup C)}_{=\emptyset} \cap (\overline{A} \cup C \cup \overline{D}) \\
= \; & \emptyset
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 1.11

1. **Relation** $A \cap B \subset B \subset A \cup B$ **:**
   Rappelons qu'on a un inclusion $X \subset Y$ si et seulement si tout élément de X est élément de Y.
   Tout élément de $A \cap B$ est dans A et dans B, donc en particulier dans B, ce qui prouve : $A \cap B \subset B$.
   Les éléments de $A \cup B$ sont les éléments de A ou B, donc, en particulier, tout élément de B est élément de $A \cup B$, ce qui prouve : $B \subset A \cup B$.
2. **Équivalence** $A = B \Leftrightarrow (A \cap B = A$ **et** $A \cup B = A)$ **:**
   On prouve une équivalence en prouvant l'implication directe : $A = B \Rightarrow (A \cap B = A$ et $A \cup B = A)$ et sa réciproque : $A = B \Leftarrow (A \cap B = A$ et $A \cup B = A)$.
   L'implication directe ne pose pas de problème, puisque si $A = B$ alors :
   $$A \cap B = A \cap A = A \text{ et } A \cup B = A \cup A = A.$$
   Pour la réciproque, on suppose que $A \cap B = A$ et $A \cup B = A$ et il faut en déduire que $A \subset B$ et $B \subset A$ — ou, ce qui revient au même : $\overline{A} \subset \overline{B}$ — ce qui donnera $A = B$, par double inclusion. Si x est élément de A alors il est élément de $A \cap B$, puisque $A \cap B = A$, donc de B puisque tout élément de $A \cap B$ est élément de B ; ainsi tout élément de A est élément de B *i.e.* $\boxed{A \subset B.}$ Si x n'est pas élément de A, alors il n'est pas élément de $A \cup B$, puisque $A = A \cup B$. Donc il n'est pas élément ni de A ni de B, donc en particulier, il n'est pas élément de B *i.e.* $\boxed{\overline{A} \subset \overline{B}.}$
3. **:**
   Analogue.
4. **Implication** $A \subset B \cup \overline{C} \Rightarrow C \cap A \subset B$ **:**
   En effet si $A \subset B \cup \overline{C}$ on déduit :
   $$C \cap A \subset C \cap (B \cup \overline{C}).$$
   Or par distributivité de l'intersection sur la réunion :
   $$C \cap (B \cup \overline{C}) = (C \cap B) \cup (C \cap \overline{C}) = (C \cap B) \cup \emptyset = C \cap B.$$
   Donc finalement :
   $$C \cap A \subset C \cap B \subset B.$$
   Réciproque $A \subset B \cup \overline{C} \Leftarrow C \cap A \subset B$ **:**
   Supposons que $C \cap A \subset B$ et prenons un élément x de A afin de montrer qu'il appartient à $B \cup \overline{C}$. Si x est élément de C, comme il était élément de A, il est élément de $A \cap C$, donc, d'après l'hypothèse, x appartient à B. Si x n'est pas élément de C il est élément de $\overline{C}$. On vient donc de montrer que, dans tous les cas, x est élément de B ou est élément de $\overline{C}$, c'est à dire qu'il est élément de $B \cup \overline{C}$.

Solution de l'exercice 1.12

1. **Inégalité :** $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ **:**
   Elle s'écrit aussi : $x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0$
   soit encore : $(x + y)^2 \geqslant 0$
   Cette relation est vraie car tout carré positif.
2. **Inégalité :** $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + xz$ **:**
   D'après la question précédente on a : $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$
   Et de même : $x^2 + z^2 \geqslant 2xz$ et $z^2 + y^2 \geqslant 2zy$. En additionnant les trois inégalités on obtient :
   $$x^2 + y^2 + x^2 + z^2 + z^2 + y^2 \geqslant 2xy + 2xz + 2yz,$$

d'où le résultat en divisant par 2.
Autre méthode : montrer puis utiliser l'identité algébrique suivante :

$$x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + xz) = \frac{1}{2}\left((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.13

1. **Inégalité :** $(x+y)^2 \geqslant 4xy$ **:**
   Elle s'écrit aussi : $x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \geqslant 0$
   soit encore : $(x+y)^2 \geqslant 0$
   Cette relation est vraie car tout carré positif.
2. **Inégalité :** $(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz$ **:**
   D'après la question précédente on a : $(x+y)^2 \geqslant 4xy$
   Et de même : $(x+z)^2 \geqslant 4xz$ et $(z+y)^2 \geqslant 4zy$. En faisant le produit des trois inégalités (tout est positif lorsque x, y et z sont positifs) on obtient :

   $$((x+y)(y+z)(z+x))^2 \geqslant (8xyz)^2.$$

   Or, pour tous les nombres positifs a, b on a : $a^2 \leqslant b^2 \Leftrightarrow a \leqslant b$.
   Comme x, y, z sont positifs, et partant de là $x+y$, $y+z$, $z+t$ et xyz sont positifs on en déduit le résultat annoncé.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.14

Tout nombre λ positif s'écrit : $\lambda = \alpha^2$. L'inégalité à prouver est alors :

$$2xy \leqslant \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + (\alpha y)^2,$$

soit :

$$0 \leqslant \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + (\alpha y)^2 - 2\left(\frac{x}{\alpha}\right)(\alpha y),$$

soit :

$$0 \leqslant \left(\frac{x}{\alpha} + \alpha y\right)^2.$$

Cette dernière relation est vrai, car tout carré est positif.
Autre méthode : utiliser $\dfrac{x^2}{\lambda} + \alpha y^2 - 2xy = \dfrac{(x-\lambda y)^2}{\lambda}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.15

Remarquons tout d'abord que, d'après la proposition 1.5.5 (n°3), pour tous les réels positifs a et b, on a $a \leqslant b$ si et seulement si $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$.

On remarque que : $\dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \left(\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\right)^2$,
et on prouve les deux inégalités séparément :

$$\frac{1}{8}\frac{(y-x)^2}{y} \leqslant \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \quad (E) \qquad \text{et} \qquad \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \leqslant \frac{1}{8}\frac{(y-x)^2}{x} \quad (E').$$

D'après la remarque préliminaire (E) est équivalente à :

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{y} - \frac{x}{\sqrt{y}}\right) = \sqrt{\frac{1}{8}\frac{(y-x)^2}{y}} \leqslant \sqrt{\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{2}},$$

soit en multipliant par $2\sqrt{2}\sqrt{y}$: $y - x \geqslant 2(y - \sqrt{x}\sqrt{y}$,
soit : $0 \geqslant x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y$,
soit : $0 \geqslant (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$,
ce qui est vrai. Donc la relation (E) est vraie. On montre de même que la relation (E') est vraie.

Solution de l'exercice 1.17

Comme tout est positif il suffit de comparer les carrés, *i.e.* de montrer que :

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \leqslant \left(2\sqrt{x+y}\right)^2,$$

soit : $x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y \leqslant 4(x+y)$,
soit : $0 \leqslant 3x+3y-2\sqrt{x}\sqrt{y}$,
soit : $0 \leqslant x+y-\frac{3}{2}\sqrt{x}\sqrt{y}$.
Or : $-\frac{3}{2}\sqrt{x}\sqrt{y} \geqslant -2\sqrt{x}\sqrt{y}$,
donc : $x+y-\frac{3}{2}\sqrt{x}\sqrt{y} \geqslant x+y-2\sqrt{x}\sqrt{y} = (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0$.

Solution de l'exercice 1.19

Faire attention que cette équation n'est pas équivalente à : $(x^3+x+4)=(x^3-3x-4)$.
En effet on a : $a=b \Rightarrow a^2=b^2$,
mais la réciproque est fausse. Utiliser plutôt ici : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.
On obtient alors l'équation équivalente : $8x(x^2-1)(x+2)=0$.
On trouve finalement quatre solutions : $\boxed{0, 1, -1 \text{ et } -2.}$

Solution de l'exercice 1.20

1. **Résolution de $4x^2+12x-5<0$:**
   Le discriminant du trinôme $4x^2+12x-5$ vaut :
   $$\Delta = (12)^2 - 4\times 4\times(-5) = 224.$$
   Il y a donc deux racines distinctes et le trinôme est négatif entre les racines. Les solutions sont donc :
   $$\boxed{-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{14}}{2} < x < -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{14}}{2}.}$$

2. **Résolution de $(x^2-25)(x^4-16)>0$:**
   On factorise le premier membre : $(x-5)(x+5)(x-2)(x+2)(x^2+4)>0$.
   Puis on fait un tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		-2		2		5		$+\infty$
$x-5$					$-$				$\vert$	$+$	
$x+5$		$-$	$\vert$								
$x-2$				$-$			$\vert$		$+$		
$x+2$			$-$		$\vert$			$+$			
$(x-5)(x+5)(x-2)(x+2)(x^2+4)$		$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	

   Les solutions sont donc :
   $$\boxed{x<-5 \text{ ou } -2<x<2 \text{ ou } x>5.}$$

3. **Résolution de $(-2x-1)(-x^2-3)(-3x^2-8x+5) \geqslant 0$:**
   Le trinôme $-3x^2-8x+5$ a deux racines réelles : $-\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{31}}{3}$ et $-\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{31}}{3}$. On fait un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{31}}{3}$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{31}}{3}$		$+\infty$
$-3x^2-8x+5$		$-$	$\vert$		$+$		$\vert$	$-$	
$-2x-1$			$+$		$\vert$		$-$		
$-x^2-3$					$-$				
$(-2x-1)(-x^2-3)(-3x^2-8x+5)$		$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$	

Les solutions sont donc :

$$\boxed{x \leqslant -\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{31}}{3} \text{ ou } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant -\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{31}}{3}.}$$

Solution de l'exercice 1.21

On a :

$$\begin{aligned}
& (x^2 - x + 1)^2 \leqslant (-2x^2 - x - 1)^2 \\
\Leftrightarrow\ & (x^2 - x + 1)^2 - (-2x^2 - x - 1)^2 \leqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & \big((x^2 - x + 1) - (-2x^2 - x - 1)\big)\big((x^2 - x + 1) + (-2x^2 - x - 1)\big) \leqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(3x^2 + 2\right)\left(-x^2 - 2x\right) \leqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & -x\,(x + 2) \leqslant 0, \text{ car } 3x^2 + 2 > 0
\end{aligned}$$

En s'aidant éventuellement d'un tableau de signes on trouve que les solutions sont les x tels que :

$$\boxed{x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 0.}$$

Solution de l'exercice 1.23

1. Remarquons d'abord que, d'après la proposition 1.5.8, comme le trinôme $4x^2 - 4x + 1$ a une seule racine $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, il s'écrit :

$$4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{4x^2 - 1} \leqslant \frac{2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{4\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)} - \frac{2x + 1}{4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)} \leqslant 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)} - \frac{2x + 1}{4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)} \leqslant 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{2x\left(x - \frac{1}{2}\right) - (2x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)}{4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\left(x + \frac{1}{2}\right)} \leqslant 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{2x^2 - x - \left(2x^2 + 2x + \frac{1}{2}\right)}{4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\left(x + \frac{1}{2}\right)} \leqslant 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{-3x - \frac{1}{2}}{4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\left(x + \frac{1}{2}\right)} \leqslant 0
\end{aligned}$$

On dresse alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-3x - \frac{1}{2}$			$+$		0		$-$		
$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$				$+$			0	$+$	
$x + \frac{1}{2}$		$-$	0			$+$			
$\frac{-3x-\frac{1}{2}}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	

Les solutions sont donc les nombres réels x tels que :

$$\boxed{x < -\frac{1}{2} \text{ ou } -\frac{1}{6} \leqslant x < \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{1}{2} < x.}$$

3. Solution : $\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{2}}.}$

10. **Résolution de l'inéquation $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$:**
Cette équation n'a de sens que pour les x réels tels que

$$3 - x \geqslant 0 \text{ et } x + 1 \geqslant 0,$$

soit $\boxed{x \in [-1, 3].}$
L'inéquation s'écrit aussi :

$$\sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1}.$$

Comme toute racine carrée est positive les deux membres de l'inéquation sont positifs. Cette inégalité est donc équivalente à l'inégalité des carrés, soit :

$$3 - x > \frac{1}{4} + \sqrt{x+1} + x + 1,$$

soit

$$\frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1}.$$

Comme toute racine carrée est positive, il n'y a pas de solution x telle que $\frac{7}{4} - 2x < 0$. On se restreint aux x tels que $\frac{7}{4} - 2x \geqslant 0$, soit $\boxed{x \leqslant \frac{7}{8}}$; alors l'inégalité a ses deux membres positifs donc est équivalente à l'inégalité entre les carrés, soit :

$$\left(\frac{7}{4} - 2x\right)^2 > x + 1,$$

soit :

$$4x^2 - 8x + \frac{33}{16} > 0.$$

Le discriminant du trinôme $4x^2 - 8x + \frac{33}{16}$ vaut : $\Delta = 31$.
Ce trinôme possède donc deux racines $1 + \frac{\sqrt{31}}{8}$ et $1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$.
L'inégalité est donc équivalente à $\boxed{x > 1 + \frac{\sqrt{31}}{8} \text{ ou } x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}.}$
Comme $-1 < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8} < \frac{7}{8} < 1 + \frac{\sqrt{31}}{8} < 3$, l'ensemble des solutions est finalement : $\boxed{\left[-1, 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}\right[.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.25

On commence par simplifier le membre de droite de l'équation. On trouve que :
- $\boxed{\text{Si } a = 1 \text{ ou } a = 2,}$ il n'y a pas de solution.
- Sinon il y a une seule solution : $\boxed{x = \frac{a^2}{a-2}.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.26

- si $m \neq 10$ et $m \neq -10$ il y a une seule solution $x = \dfrac{5}{m-10}$.
- si $m = 10$ il n'y a pas de solution.
- si $m = -10$ tout x réel est solution.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.27

L'équation n'a de sens que lorsque $\boxed{x \neq 2.}$

En multipliant par $x-2$ elle est alors équivalente à : $mx + 5 = \dfrac{1-m}{3}(x-2)$,
soit : $x\left(m - \dfrac{1-m}{3}\right) = -5 - 2\dfrac{1-m}{3}$,
soit : $x\dfrac{4m-1}{3} = \dfrac{2m-17}{3}$.

- si $4m-1=0$, soit $\boxed{m = \frac{1}{4},}$ l'équation s"écrit :

$$0 = -\frac{33}{6},$$

  il n'y a donc pas de solution.
- si $4m-1 \neq 0$, soit $\boxed{m \neq \frac{1}{4},}$ alors on obtient

$$\boxed{x = \frac{2m-17}{4m-1}.}$$

  Cette solution n'est valable que si elle ne vaut pas 2, soit : $\frac{2m-17}{4m-1} \neq 2$,
  soit : $2m - 17 \neq 8m - 2$,
  soit : $m \neq -\frac{5}{2}$.

En résumé
- si $m = \frac{1}{4}$ ou $m = -\frac{5}{2}$ il n'y a pas de solution.
- sinon il y a une seule solution : $x = \frac{2m-17}{4m-1}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.28

Méthode analogue à l'exercice précédent. On trouve :
- pas de solution si $m \in \left\{-3, \dfrac{1}{2}, 4\right\}$.
- sinon il y a une seule solution $x = \dfrac{m+3}{4-m}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.32

L'équation se simplifie en :

$$2x(a-b) = (a-b)^2.$$

Ainsi :
- $\boxed{\text{Si } a \neq b,}$ il y a une seule solution $\boxed{x = \dfrac{a-b}{2}.}$
- $\boxed{\text{Si } a = b,}$ l'équation s'écrit $0=0$. Elle est donc vraie pour $\boxed{\text{tout } x \in \mathbb{R}.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.29

$$\boxed{m \in \left]\frac{-1-2\sqrt{43}}{19}, \frac{-1+2\sqrt{43}}{19}\right[- \{0\}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.31

On a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^3 + x^2 + (m+3)x + 1} = x + 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x^3 + x^2 + (m+3)x + 1 = (x+1)^2 \text{ et } x + 1 \geqslant 0, \\
&\Leftrightarrow \quad x^3 + (m+1)x = 0 \text{ et } x \geqslant -1 \\
&\Leftrightarrow \quad (x = 0 \text{ ou } x^2 + (m+1) = 0) \text{ et } x \geqslant -1
\end{aligned}$$

On voit que $x = 0$ est solution car $0 \geqslant -1$. Résolvons $x^2 + (m+1) = 0$ (avec $x \geqslant -1$) :
- si $m + 1 > 0$, on a $x^2 + (m+1) > 0$, donc il n'y a pas d'autre solution.
- si $m + 1 = 0$, soit $m = -1$ on retrouve la solution $x = 0$
- si $m + 1 < 0$, on a :

  $$x^2 + (m+1) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{-m-1} \text{ ou } x = -\sqrt{-m-1}.$$

  Comme une racine carrée est toujours positive, il est clair que : $x \geqslant -1$ lorsque $x = \sqrt{-m-1}$, donc on obtient une solution supplémentaire.
  Il faut vérifier si $x \geqslant -1$ pour $x = -\sqrt{-m-1}$, soit :

  $$-\sqrt{-m-1} \geqslant -1,$$

  soit

  $$\sqrt{-m-1} \leqslant 1,$$

  soit (les deux membres sont positifs) :

  $$-m-1 \leqslant 1^2,$$

  soit $m \geqslant -2$.

En résumé
- si $m \geqslant -1$ il y a une seule solution $x = 0$.
- si $-2 \leqslant m < -1$ il y a trois solutions : $x = 0$, $x = \sqrt{-m-1}$ ou $x = -\sqrt{-m-1}$.
- si $m < -2$ il y a deux solutions $x = 0$ ou $x = \sqrt{-m-1}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.37

L'inéquation est équivalente à :

$$\frac{x + (3m-2)}{(x-2)(x+1)} > 0.$$

Il faut faire un tableau signe comportant les trois nombres : -1,2 et $2 - 3m$. On est donc amené à discuter la position relation de ces trois nombres et à faire un tableau de signes différent dans chaque cas. L'ensemble des solutions S vaut alors :
- si $m < 0$ (*i.e.* $2 - 3m > 2$) alors $S =]-1, 2[\cup]2-3m, +\infty[$.
- si $m = 0$ (*i.e.* $2 - 3m = 2$) alors $S =]-1, 2[\cup]2, +\infty[$.
- si $0 < m < 1$ (*i.e.* $-1 < 2 - 3m < 2$) alors $S =]-1, 2-3m[\cup]2, +\infty[$.
- si $m = 1$ (*i.e.* $2 - 3m = -1$) alors $S =]2, +\infty[$.
- si $m > 1$ (*i.e.* $2 - 3m < -1$) alors $S =]2-3m, -1[\cup]2, \infty[$.

SOLUTION DU PROBLÈME 1.40

1. **Résolution de (E) si elle n'est pas du second degré :**
   Cette équation n'est pas du second degré lorsque $m + 1 = 0$ soit $\boxed{m = -1.}$ Alors l'équation s'écrit :

   $$x + 2 = 0$$

   soit $\boxed{x = -2.}$
   On se place désormais dans le cas où $m \neq -1$ (et $m \neq 0$ d'après l'énoncé).
2. **Calcul du discriminant :**
   Il est donnée par :

   $$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{m^2} + 4(m+1)(m-1) \\ &= \frac{1 + 4(m^2-1)m^2}{m^2} \\ &= \frac{4m^4 - 4m^2 + 1}{m^2} \end{aligned}$$

On reconnaît que le numérateur de Δ est un trinôme du second degré en m^2 ; après calcul du discriminant de ce deuxième trinôme on voit qu'il a une racine double $m^2 = \frac{1}{2}$ on a donc la factorisation :

$$\Delta = \frac{4(m^2 - \frac{1}{2})^2}{m^2},$$

soit :

$$\boxed{\Delta = \frac{4\left(m - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(m + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{m^2}.}$$

3. **Solutions de (E) :**

   Le calcul précédent montre que Δ est le carré de $\frac{2\left(m - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(m + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{m} = \frac{2m^2-1}{m}$.
   Il y a donc deux possibilités :

   (a) <u>cas où $\Delta = 0$, soit $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $m = -\frac{1}{\sqrt{2}}$:</u>

   Alors équation (E) a une seule solution $x = \frac{1}{2m(m+1)}$ *i.e.* $\boxed{S = \left\{ \frac{1}{2m(m+1)} \right\}}$,
   soit $S = \left\{ \frac{1}{1+\sqrt{2}} \right\}$ si $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $S = \left\{ \frac{1}{1-\sqrt{2}} \right\}$ si $m = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

   (b) <u>cas où $\Delta > 0$, soit $m \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $m \neq -\frac{1}{\sqrt{2}}$:</u>
   L'équation (E) a donc deux racines réelles distinctes :

   $$x = \frac{\frac{1}{m} + \frac{2m^2-1}{m}}{2(m+1)} = \frac{\frac{2m^2}{m}}{2(m+1)} = \frac{m}{m+1}$$

   ou

   $$x = \frac{\frac{1}{m} - \frac{2m^2-1}{m}}{2(m+1)} = \frac{2 - 2m^2}{2m(m+1)} = \frac{1-m}{m}$$

   L'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc : $\boxed{S = \left\{ \frac{m}{m+1}, \frac{1-m}{m} \right\}}$.

4. **Signe de $\frac{m-1}{m} + \frac{m}{m+1}$:**
   On a :

   $$\frac{m-1}{m} + \frac{m}{m+1} = \frac{(m-1)(m+1) + m^2}{m(m+1)} = \frac{2m^2-1}{m(m+1)}$$

   On fait le tableau de signes suivant :

m	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$2m^2-1$			$+$		0		$-$		0	$+$	
$m(m+1)$		$+$	0		$-$		0		$+$		
$\frac{2m^2-1}{m(m+1)}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

5. **Résolution de (I) :**
   L'inéquation (I) s'écrit aussi :

   $$(m+1)x^2 - \frac{x}{m} - (m-1) \geqslant 0.$$

   L'ensemble des solutions dépend donc du signe de $m+1$ et des racines de (E). De plus la question précédente donne le signe de la différence des racines ; elle permet donc de savoir quelle est la plus grande racine. Distinguons quatre cas :

(a) <u>si $m = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$:</u>
Alors $m+1$ est positif et l'équation (E) a une racine double, donc l'ensemble des solutions de I est $\boxed{\mathbb{R}.}$

(b) <u>si $m < -1$:</u>
Alors $m+1 < 0$ et $\dfrac{m}{m+1} > \dfrac{1-m}{m}$. L'ensemble des solutions est donc l'intervalle :

$$\boxed{\left[\frac{1-m}{m}, \frac{m}{m+1}\right].}$$

(c) <u>si $m \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$:</u>
Alors $m+1 > 0$ et $\dfrac{m}{m+1} > \dfrac{1-m}{m}$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{\left]-\infty, \frac{1-m}{m}\right] \cup \left[\frac{m}{m+1}, +\infty\right[.}$$

(d) <u>si $m \in \left]-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$:</u>
Alors $m+1 > 0$ et $\dfrac{m}{m+1} < \dfrac{1-m}{m}$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{\left]-\infty, \frac{m}{m+1}\right] \cup \left[\frac{1-m}{m}, +\infty\right[.}$$

Solution du problème 1.41

1. **Positions relatives des nombres p, p^2+p+1 et $\frac{1}{1-p}$:**

Remarquons d'abord que $p^2+1 > 0$, ce qui entraîne que $\boxed{p < p^2+p+1.}$ Il reste donc à placer $\frac{1}{1-p}$ par rapport aux deux autres.

– L'équation $\frac{1}{1-p} \leqslant p$ équivaut à :

$$\frac{1}{1-p} - p \leqslant 0,$$

soit :

$$\frac{p^2-p+1}{1-p} \leqslant 0,$$

Comme le discriminant du trinôme p^2-p+1 vaut -3, il est toujours strictement positif. Ainsi $\boxed{\text{l'équation } \frac{1}{1-p} \leqslant p \text{ équivaut à } 1-p<0, \text{ soit } p>1.}$

– L'équation $p^2+p+1 \leqslant \frac{1}{1-p}$ équivaut à :

$$p^2+p+1 - \frac{1}{1-p} \leqslant 0,$$

soit

$$\frac{(p^2+p+1)(1-p)-1}{1-p} \leqslant 0,$$

soit

$$\frac{-p^3}{1-p} \leqslant 0.$$

On fait un tableau de signes :

p	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-p^3$		$+$	0	$-$		$-$	
$1-p$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{-p^3}{1-p}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Donc $\boxed{\text{l'équation } p^2+p+1 \leqslant \frac{1}{1-p} \text{ équivaut donc à } 0<p<1}$ (notons bien que l'énoncé exclut a priori le cas $p=0$).

Il se présente donc trois cas :

$$\boxed{\begin{cases} p < \frac{1}{1-p} < 1+p+p^2 & \text{si } p<0 \\ p < p^2+p+1 < \frac{1}{1-p} & \text{si } 0<p<1 \\ \frac{1}{1-p} < p < p^2+p+1 & \text{si } p>1 \end{cases}}$$

2. **Résolution de l'inéquation :**

L'inéquation n'a de sens que lorsque $(1-p)x-1 \neq 0$, soit $x \neq \frac{1}{1-p}$ (puisque $p \neq 1$). Elle s'écrit aussi :

$$\frac{x^2+(1-p-(p+1)^2)x+p^3+p^2+p-1}{(1-p)x-1} - 1 \geqslant 0,$$

soit

$$\frac{x^2+(1-p-(p+1)^2)x+p^3+p^2+p-1-((1-p)x-1)}{(1-p)x-1} \geqslant 0,$$

soit

$$\boxed{\frac{x^2-(p+1)^2x+p^3+p^2+p}{(1-p)x-1} \geqslant 0.}$$

Le discriminant du trinôme présent au numérateur vaut :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-(p+1)^2)^2 - 4(p^3+p^2+p) \\ &= (p+1)^4 - 4(p^3+p^2+p) \\ &= p^4+4p^3+6p^2+4p+1-4(p^3+p^2+p) \\ &= p^4+2p^2+1 \\ &= (p^2+1)^2 > 0. \end{aligned}$$

Il a donc deux racines réelles distinctes :

$$\frac{(p+1)^2+(p^2+1)}{2} = p^2+p+1 \text{ et } \frac{(p+1)^2-(p^2+1)}{2} = p.$$

Comme $p^2+1>0$, on déduit que $p < p^2+p+1$, donc le signe du numérateur est donné par :

x	$-\infty$		p		$1+p+p^2$		$+\infty$
$x^2-(p+1)^2x+p^3+p^2+p$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le signe du dénominateur $(1-p)x-1$ est donné, lui, par :

x	$-\infty$		$\frac{1}{1-p}$		$+\infty$	
$(1-p)x-1$		$-$	0	$+$		si $1-p>0$
$(1-p)x-1$		$+$	0	$-$		si $1-p<0$

On a donc trois cas en fonction de la position de $\frac{1}{1-p}$ par rapport à p et p^2+p+1.

(a) Si $p < 0$, On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		p		$\frac{1}{1-p}$		$1+p+p^2$		$+\infty$
$x^2-(p+1)^2x+p^3+p^2+p$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(1-p)x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2-(p+1)^2x+p^3+p^2+p}{(1-p)x-1}$		$-$	0	$+$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est alors

$$\boxed{\left[p, \frac{1}{1-p}\right[\cup \left[1+p+p^2, +\infty\right[.}$$

(b) Si $0 < p < 1$, On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		p		$1+p+p^2$		$\frac{1}{1-p}$		$+\infty$
$x^2-(p+1)^2x+p^3+p^2+p$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$(1-p)x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x^2-(p+1)^2x+p^3+p^2+p}{(1-p)x-1}$		$-$	$\vert\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est alors

$$\boxed{\left[p, 1+p+p^2\right] \cup \left]\frac{1}{1-p}, +\infty\right[.}$$

(c) Si $1 < p$, On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{1-p}$		p		$1+p+p^2$		$+\infty$
$x^2-(p+1)^2x+p^3+p^2+p$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(1-p)x-1$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\frac{x^2-(p+1)^2x+p^3+p^2+p}{(1-p)x-1}$		$+$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est alors

$$\boxed{\left]-\infty, \frac{1}{1-p}\right[\cup \left[p, 1+p+p^2\right].}$$

3. **Résolution de l'inéquation** $\frac{x^2+(1-p\boxed{+}(p+1)^2)x+p^3+p^2+p-1}{(1-p)x-1} \geqslant 1$ **:**

L'inéquation n'a de sens que lorsque $(1-p)x-1 \neq 0$, soit $x \neq \frac{1}{1-p}$ (puisque $p \neq 1$). Elle s'écrit aussi :

$$\frac{x^2+(1-p-(p+1)^2)x+p^3+p^2+p-1}{(1-p)x-1} - 1 \geqslant 0,$$

soit

$$\frac{x^2+(1-p+(p+1)^2)x+p^3+p^2+p-1-((1-p)x-1)}{(1-p)x-1} \geqslant 0,$$

soit

$$\boxed{\frac{x^2+(p+1)^2x+p^3+p^2+p}{(1-p)x-1} \geqslant 0.}$$

Le discriminant du trinôme présent au numérateur vaut :

$$\begin{aligned}
\Delta &= ((p+1)^2)^2 - 4(p^3+p^2+p) \\
&= (p+1)^4 - 4(p^3+p^2+p) \\
&= p^4+4p^3+6p^2+4p+1-4(p^3+p^2+p) \\
&= p^4+2p^2+1 \\
&= (p^2+1)^2 > 0.
\end{aligned}$$

Il a donc deux racines réelles distinctes :

$$\frac{-(p+1)^2-(p^2+1)}{2} = -p^2-p-1 \text{ et } \frac{-(p+1)^2+(p^2+1)}{2} = -p.$$

Comme $p^2+1>0$, on déduit que $-p^2-p-1 < -p$, donc le signe du numérateur est donné par :

x	$-\infty$		$-p^2-p-1$		$-p$		$+\infty$
$x^2+(p+1)^2x+p^3+p^2+p$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le signe du dénominateur $(1-p)x-1$ est donné, lui, par :

x	$-\infty$		$\frac{1}{1-p}$		$+\infty$	
$(1-p)x-1$		$-$	0	$+$		si $1-p>0$
$(1-p)x-1$		$+$	0	$-$		si $1-p<0$

On a donc plusieurs cas en fonction de la position de $\frac{1}{1-p}$ par rapport à $-p$ et $-p^2-p-1$ et de celle de p par rapport à 1. En procédant comme à la question 1 on trouve :

$$\frac{1}{1-p}-(-p) = \frac{1+p-p^2}{1-p} \text{ et } \frac{1}{1-p}-(-1-p-p^2) = \frac{2-p^3}{1-p}$$

Le trinôme $1+p-p^2$ est positif entre les racines, à savoir $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On obtient donc le tableau de signes

p	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		1		$\sqrt[3]{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$\frac{1}{1-p}-(-p)$		$-$	0	$+$	$\vert\vert$	$+$	$\vert\vert$	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{1}{1-p}-(-1-p-p^2)$		$+$		$+$	$\vert\vert$	$+$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$		$+$	

(a) Si $p \in \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$, On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-1-p-p^2$		$\frac{1}{1-p}$		$-p$		$+\infty$
$x^2-(p+1)^2x+p^3+p^2+p$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(1-p)x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2+(p+1)^2x+p^3+p^2+p}{(1-p)x-1}$		$-$	0	$+$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est alors

$$\boxed{\left[-1-p-p^2, \frac{1}{1-p}\right[\cup [-p, +\infty[.}$$

(b) Si $p \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right[- \{0\}$ On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-1-p-p^2$		$-p$		$\frac{1}{1-p}$		$+\infty$
$x^2-(p+1)^2x+p^3+p^2+p$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$(1-p)x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x^2+(p+1)^2x+p^3+p^2+p}{(1-p)x-1}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\vert\vert$	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est alors

$$\boxed{[-1-p-p^2, -p] \cup \left]\frac{1}{1-p}, +\infty\right[.}$$

(c) <u>Si $p \in \left]1, \sqrt[3]{2}\right[$,</u> On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{1-p}$		$-1-p-p^2$		$-p$		$+\infty$
$x^2+(p+1)^2x+p^3+p^2+p$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(1-p)x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{x^2-(p+1)^2x+p^3+p^2+p}{(1-p)x-1}$		$-$	$\vert\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est alors

$$\boxed{\left]\frac{1}{1-p}, -1-p-p^2\right] \cup [-p, +\infty[.}$$

(d) <u>Si $p \in \left]\sqrt[3]{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$,</u> On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-1-p-p^2$		$\frac{1}{1-p}$		$-p$		$+\infty$
$x^2-(p+1)^2x+p^3+p^2+p$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(1-p)x-1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{x^2+(p+1)^2x+p^3+p^2+p}{(1-p)x-1}$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert\vert$	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est alors

$$\boxed{]-\infty, -1-p-p^2] \cup \left]\frac{1}{1-p}, -p\right].}$$

(e) <u>Si $p > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,</u> On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-1-p-p^2$		$-p$		$\frac{1}{1-p}$		$+\infty$
$x^2-(p+1)^2x+p^3+p^2+p$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$(1-p)x-1$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x^2+(p+1)^2x+p^3+p^2+p}{(1-p)x-1}$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert\vert$	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est alors

$$\boxed{]-\infty, -1-p-p^2] \cup \left[-p, \frac{1}{1-p}\right[.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.42

Les relations 1 à 3 et 5 sont fausses. Pour montrer qu'une relation est fausse il suffit de trouver un contre-exemple X, A, B, C de nature géométrique (un dessin suffit) ou algébrique (par exemple $X = \mathbb{N}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ et $C = \{2, 4, 5, 7\}$.)

La bonne réponse est 4. La démonstration se fait à l'aide de la distributivité de l'intersection sur la réunion :

$$(A \cap (B \cup C)) \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = L.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.43

Les affirmations exactes sont : 1,6,7,9,13,15,16.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.44

1. **Traduction des relations (a) à (f) :**

   (a) : $\boxed{\forall h \in H,\ h \in M}$, ou encore $\boxed{h \in H \Rightarrow h \in M}$, soit $\boxed{H \subset M.}$

   (b) : $\boxed{\forall h \in H,\ h \notin M,}$ ou encore $\boxed{h \in H \Rightarrow h \notin M,}$ soit $\boxed{h \in H \Rightarrow h \in \overline{M},}$ soit $\boxed{H \subset \overline{M}.}$

   (c) : $\boxed{\forall m \in M,\ m \notin H,}$ ou encore $\boxed{m \in M \Rightarrow m \notin H,}$ soit $\boxed{m \in M \Rightarrow m \in \overline{H},}$ soit $\boxed{M \subset \overline{H}.}$

   (d) : $\boxed{\forall m \in \overline{M},\ m \notin H,}$ ou encore $\boxed{m \notin M \Rightarrow m \notin H,}$ soit $\boxed{m \in \overline{M} \Rightarrow m \in \overline{H},}$ soit $\boxed{\overline{M} \subset \overline{H}.}$

   (e) : $\boxed{\exists h \in H,\ h \notin M,}$ ou encore $\boxed{H \cap \overline{M} \neq \emptyset.}$

   (f) : $\boxed{\exists h \in H,\ h \in M,}$ ou encore $\boxed{H \cap M \neq \emptyset.}$

2. **Lien logiques entre les relations (a) à (f) :**
   On a notamment :
   – les relations (a) et (d) sont équivalentes ;
   – les relations (b) et (c) sont équivalentes ;
   – la relation (e) est la négation de la relation (a) (et donc de (d)) ;
   – la relation (f) est la négation de la relation (b) (et donc de (c)) ;
   – la relation (a) (ou (d)) implique la relation (f) ;
   – la relation (b) (ou (c)) implique la relation (e) ;

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.45

Négation de la phrase :

La négation de "Tous les habitants de la rue Pirandello qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans." est "Il y a des habitants de la rue Pirandello qui ont les yeux bleus, mais qui ne gagneront pas au loto ou[7] prendront leur retraite après 50 ans."

Modélisation :

Soit H l'ensemble des habitants de la rue Pirandello qui ont les yeux bleus, G l'ensemble des gagnants au loto et R l'ensemble des personnes qui prendront leur retraite avant 50 ans. La phrase signifie alors

$$\boxed{\forall h \in H,\ h \in G \cap R,}$$

soit encore : $\boxed{H \subset G \cap R.}$ Sa négation peut donc s'écrire :

$$\boxed{\exists h \in H,\ h \in \overline{G} \cup \overline{R},}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.46

L'équation du second degré $2x^2 - 3 = 0$ a deux racines réelles : $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{3}{2}}$, donc $2x^2 - 3$ est strictement négatif pour $x \in \left]-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right[$. Par ailleurs l'équation $-4x^2 + 2x - 1$ n'a pas de racines réelles ; donc $-4x^2 + 2x - 1$ est strictement négatif pour tout x. Il n'y a donc pas de solution *i.e.* l'ensemble recherché est $\boxed{\text{l'ensemble vide.}}$

[7] "ou" mathématique, c'est-à-dire : l'un, l'autre, ou les deux

Solution de l'exercice 1.47

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{7x+10}{7x^2} > \frac{1}{x-5} &\Leftrightarrow \frac{7x+10}{7x^2} - \frac{1}{x-5} > 0\\
&\Leftrightarrow \frac{(7x+10)(x-5)-7x^2}{7x^2(x-5)} > 0\\
&\Leftrightarrow \frac{-25(x+2)}{7x^2(x-5)}\\
(x-2)^2-(x-2)(x-10) \leqslant x^2-2x &\Leftrightarrow (x-2)^2-(x-2)(x-10)-x(x-2) \leqslant 0\\
&\Leftrightarrow (x-2)(8-x) \leqslant 0
\end{aligned}$$

En faisant un tableau de signes on obtient l'ensemble des solutions : $\boxed{]-2,0[\cup]0,5[.}$

Solution de l'exercice 1.48

L'inéquation $x+\frac{1}{2x} \leqslant 2$ s'écrit aussi : $\frac{2x^2-4x+1}{x} \leqslant 0$
De même : $-2 < x+\frac{1}{2x} \Leftrightarrow \frac{2x^2+4x+1}{x} > 0$
L'équation du second degré $2x^2-4x+1=0$ a deux racines réelles : $1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$. L'équation du second degré $2x^2+4x+1=0$ a deux racines réelles : $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$. On a donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-1+\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$1-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$1+\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$2x^2-4x+1$				$+$					$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	
$\frac{2x^2-4x+1}{x}$				$-$			$\Vert$	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	
$2x^2+4x+1$		$+$	$\vert$	$-$	$\vert$					$+$			
$\frac{2x^2+4x+1}{x}$		$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$	$\Vert$			$+$			

On voit ainsi que x ne réalise simultanément les deux conditions $\frac{2x^2-4x+1}{x} \leqslant 0$ et $\frac{2x^2+4x+1}{x} > 0$ que lorsque c'est un élément de l'ensemble :

$$\boxed{\left]-1-\frac{1}{\sqrt{2}},-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left[1-\frac{1}{\sqrt{2}},1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right].}$$

Solutions des exercices du chapitre 2

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.3

Il faut faire un dessin en utilisant (sur l'axe des abscisses) que ;

$$-\frac{3}{2} < -1 < -\frac{1}{\sqrt{2}} < -\frac{1}{2} < 0 < \sqrt{2}-1 < \frac{1}{2} < \sqrt{3} < \sqrt{2}+1 < 2+\frac{1}{\sqrt{2}} < 3,$$

et (sur l'axe des ordonnées) que :

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < \frac{15}{2} < 8 < 9.$$

On voit qu'on obtient la réunion suivante de 4 pavés disjoints :

$$\boxed{A \cap B = ([-1,0]\times[3,4]) \cup \left([-1,0]\times\left[7,\frac{15}{2}\right]\right) \cup \left([\sqrt{3},\sqrt{2}+1]\times[7,8]\right) \cup \left(\left[2+\frac{1}{\sqrt{2}},3\right]\times[2,4]\right).}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.4

1. **Solution du premier système :**

$$(x,y) \in \left\{(1,0);\left(1,-\frac{1}{2}\right);(-1,0);\left(-1,\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

2. **Solution du second système :**

$$(x,y) \in \{(0,1);(0,-1);(1,0);(1,-1);(-1,0);(-1,1)\}.$$

NB : ne pas simplifier par x dans l'équation $x^3 = x$ sinon on "perd" les deux solutions (x,y) telles que $x = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.5

On trouve comme ensemble de solutions :

$$\boxed{(]-\infty,1[\cup]2,4]\cup[5,+\infty[)\times\{2\}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.6

1. **Solution du premier système :**

En développant et simplifiant, la deuxième équation du système s'écrit :

$$x^2 - x + y^2 = 0,$$

donc le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x(x^2+y^2) - y^2 = 0 \\ x^2+y^2 = x \end{cases}$$

En remplaçant x^2+y^2 par x dans la première équation on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2+y^2 = x \end{cases}$$

En additionnant la première ligne à la deuxième on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2x^2 = x \end{cases}$$

On résout la seconde équation qui est une équation du second degré en x ; on trouve deux solutions pour x, à savoir 0 et $\frac{1}{2}$. Le système est donc équivalent à :

$$(x = 0 \text{ et } -y^2 = 0) \text{ ou } (x = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{4} - y^2 = 0)$$

soit trois solutions : $\boxed{(x, y) \in \left\{ (0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\}.}$

2. **Solution du second système :**
Les deux premières équations donnent les valeurs possibles de x et y et on déduit les valeurs possibles de z d'après la troisième (in)équation :

$$z^2 \leqslant 0 \text{ si } x = y = 0, \text{ soit } z = 0$$

$$z^2 + 2z + 1 \leqslant 0 \text{ si } x = y = \frac{1}{2}, \text{ soit } z = -1$$

$$z^2 + 2z - 1 \leqslant 0 \text{ si } x = \frac{1}{2} \text{ et } y = -\frac{1}{2}, \text{ soit } z \in \left[-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}\right].$$

Au total l'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{S = \left\{ (0, 0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, z\right) \,\middle|\, z \in \left[-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}\right] \right\}.}$$

Solution de l'exercice 2.9

Si $a \neq 1$ $(x, y) = \left(\frac{1}{a-1}, \frac{1}{a-1}\right)$ est une solution. Si $a \neq -1$ et $(a+1)(a-3) \geqslant 0$ alors une autre solution est :

$$(x, y) = \left(\frac{1 + \sqrt{\frac{a-3}{a-1}}}{2}, \frac{1 - \sqrt{\frac{a-3}{a-1}}}{2} \right).$$

Il n'y a pas d'autres solutions.

Solution de l'exercice 2.10

On fait le changement de variable $a = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$:

$$x^2 - 3x + 5 = 2\sqrt{x^2 - 3x + 2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \\ a^2 + 3 = 2a \end{cases}$$

L'équation du second degré en a n'a pas de solution, donc l'équation de départ $\boxed{\text{n'a pas de solution.}}$

Solution de l'exercice 2.11

1. **Les x pour lesquels l'équation a un sens :**
La quantité $\sqrt{x^2 - 1}$ n'est définie que lorsque $x^2 - 1 \geqslant 0$ c'est-à-dire $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Par ailleurs la quantité $\sqrt{x^2 - p}$ est définie :
– toujours si $p \leqslant 0$
– pour $x \in]-\infty, -\sqrt{p}] \cup [\sqrt{p}, +\infty[$, si $p > 0$.

Ainsi pour $p \leqslant 0$ la somme $\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}$ n'est définie que pour $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$. Et pour $p > 0$, elle n'est définie que si x appartient à l'ensemble :

$$I_p = (]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[) \cap (]-\infty,-\sqrt{p}] \cup [\sqrt{p},+\infty[.$$

Or, pour $p \geqslant 1$ on a $\sqrt{p} \geqslant 1$ et $-\sqrt{p} \leqslant -1$, d'où :

$$I_p =]-\infty,-\sqrt{p}] \cup [\sqrt{p},+\infty[.$$

Pour $0 < p < 1$ on a $\sqrt{p} \leqslant 1$ et $-\sqrt{p} \geqslant -1$, d'où :

$$I_p =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[.$$

Finalement on voit que l'équation n'a de sens pour les x appartenant à l'ensemble suivant :

$$\boxed{\begin{cases}]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[& \text{si } p < 1 \\ ]-\infty,-\sqrt{p}] \cup [\sqrt{p},+\infty[& \text{si } p \geqslant 1 \end{cases}.}$$

2. **Il n'y a pas de solution négative :**
En effet comme la fonction racine carrée n'a que des valeurs positives, on voit immédiatement que $\boxed{\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1} \geqslant 0 \text{ pour tout } x.}$ Il n'est donc pas possible que, à la fois, $x < 0$ et $x = \sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}$. On n'envisage pas non plus la solution $x = 0$ car l'équation n'a alors pas de sens.

3. **Système équivalent :**
On vient de voir qu'on peut se restreindre à $\boxed{x \text{ strictement positif.}}$ L'équation est alors équivalente à :

$$(\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1})^2 = x^2,$$

soit :

$$x^2-p+4\sqrt{x^2-p}\sqrt{x^2-1}+4(x^2-1) = x^2.$$

soit encore :

$$4\sqrt{x^2-p}\sqrt{x^2-1} = -4x^2+4+p. \quad (Eq)$$

Pour que cette équation ait des solutions, $\boxed{\text{il est donc nécessaire que } -4x^2+4+p \geqslant 0.}$ Dans ce cas on obtient une équation équivalente en élevant à nouveau au carré :

$$(4\sqrt{x^2-p}\sqrt{x^2-1})^2 = (-4x^2+4+p)^2,$$

soit :

$$16(x^2-p)(x^2-1) = (-4x^2+4+p)^2,$$

soit, en développant :

$$16x^4-16(p+1)x^2+16p = 16x^4-8\,(4+p)\,x^2+(p+4)^2,$$

soit, après simplifications :

$$\boxed{x^2(16-8p) = (p+4)^2-16p = (p-4)^2.}$$

4. **Résolution de l'équation :**
Si $p = 2$, l'équation précédente s'écrit $0x^2 = 4$; il n'y a donc pas de solution. Si $p > 2$, on obtient $x^2 = \frac{(p-4)^2}{16-8p} < 0$ ce qui est impossible ; il n'y a donc pas de solution. Si $\boxed{p < 2,}$ on obtient $x^2 = \frac{(p-4)^2}{16-8p} > 0$; regardons alors si la condition $-4x^2 + 4 + p \geqslant 0$ est satisfaite :

$$\begin{aligned} -4x^2 + 4 + p &= -4\frac{(4-p)^2}{16-8p} + 4 + p \\ &= \frac{(4-p)^2}{2p-4} + 4 + p \\ &= \frac{(4-p)^2 + (4+p)(2p-4)}{2p-4} \\ &= \frac{3p^2 - 4p}{2p-4} \end{aligned}$$

On fait alors un tableau de signes :

p	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$2p-4$				$-$			$\vert$	$+$	
$3p^2-4p$		$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$			
$\frac{3p^2-4p}{2p-4}$		$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

Compte-tenu de la contrainte $p < 2$, on voit donc que cette condition n'est satisfaite que pour $\boxed{p \in \left[0, \frac{4}{3}\right].}$ L'équation $x^2(16 - 8p) = (p + 4)^2 - 16p = (p - 4)^2$ admet alors deux solutions opposées ; la seule solution positive est :

$$\boxed{x = \frac{4-p}{\sqrt{16-8p}}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.12

Faire des changements de variable pour se ramener à des systèmes linéaires.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.13

1. C'est un système de Cramer de solution :

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

2. Le système a un ensemble de solutions paramétrées par $\mathbb{R}$.
3. Il n'y a pas de solution.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.15

1. Une solution $(x, y) = (1, -1)$.
2. Une solution $(x, y) = \left(-\frac{4}{7}, \frac{19}{7}\right)$.
3. Une solution $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.
4. Une infinité de solutions :
$$\{(z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$
5. Pas de solution.
6. Une infinité de solutions :
$$\{(2, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$
7. Une infinité de solutions (à préciser).
8. Pas de solution.
9. Pas de solution.
10. Une infinité de solutions (à préciser).
11. Une infinité de solutions (à préciser)

12. Une infinité de solutions
$$\left\{ \left(-\frac{9}{2}w-2, 2z-3w-1, z, 2+3w, w\right) \;\middle|\; z, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

13. Pas de solution.
14. Une infinité de solutions $\{ (x,x,x) \mid x \in \mathbb{R} \}$.
15. Pas de solution.
16. Une infinité de solutions :
$$\{ (3-2z, 2z-2, z) \mid z \in \mathbb{R} \}.$$
17. Une solution $(x,y,z) = (0,0,0)$.
20. Une solution $(x,y,z,t) = (1,2,3,4)$.
21. Une solution $(x,y,z,t) = (0,-2,1,3)$.
24. Une solution $(x,y,z,t) = (1,-1,2,0)$.

Solution de l'exercice 2.16

On utilise la méthode de Gauss :
$$\left\{\begin{array}{rcll} (\sqrt{3}-\sqrt{2})x+\sqrt{2}y &=& -\sqrt{\frac{2}{3}} & L_1 \\ \sqrt{2}x+(\sqrt{3}+\sqrt{2})y &=& -1-\frac{1}{\sqrt{6}} & L_2 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} \sqrt{2}x+(\sqrt{3}+\sqrt{2})y &=& -1-\frac{1}{\sqrt{6}} & L_2 \\ (\sqrt{2}\sqrt{2}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}))y &=& \sqrt{2}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\left(-1-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) & \sqrt{2}L_1-(\sqrt{3}-\sqrt{2})L_2 \end{array}\right.$$
Or on a :
$$(\sqrt{2}\sqrt{2}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})) = \sqrt{2}^2-(\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2) = 2-(3-2) = 1.$$
et
$$\begin{aligned} \sqrt{2}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\left(-1-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) &= -\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}+\sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{6}}-\sqrt{2}-\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{6}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$
La résolution du système échelonné obtenu ci-dessus donne alors :
$$\left\{\begin{array}{rcl} y &=& -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x &=& \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1-\frac{1}{\sqrt{6}}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})y\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1-\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}+1\right) = -\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{array}\right.$$
Il y a donc une unique solution :
$$\boxed{(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).}$$

Solution de l'exercice 2.17

Le pivot de Gauss donne :
$$\left\{\begin{array}{rcll} x+3y+5z-4t &=& 1 & L_1 \\ x+3y+3z-2t+w &=& -1 & L_2 \\ x-2y+z-t-w &=& 3 & L_3 \\ x-4y+z+t-w &=& 3 & L_4 \\ x+2y+z-t+w &=& -1 & L_5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+3y+5z-4t &=& 1 & L_1 \\ -2z+2t+w &=& -2 & L_2 \longleftarrow L_2-L_1 \\ -5y-4z+3t-w &=& 2 & L_3 \longleftarrow L_3-L_1 \\ -7y-4z+5t-w &=& 2 & L_4 \longleftarrow L_4-L_1 \\ -y-4z+3t+w &=& -2 & L_5 \longleftarrow L_5-L_1 \end{array}\right.$$

On permute les colonnes pour avoir un pivot plus simple :

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x\quad +3y+5z-4t &=& 1 & L_1 \\ +w\quad -2z+2t &=& -2 & L_2 \\ -w-5y-4z+3t &=& 2 & L_3 \\ -w-7y-4z+5t &=& 2 & L_4 \\ +w-y-4z+3t &=& -2 & L_5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x\quad +3y+5z-4t &=& 1 & L_1 \\ +w\quad -2z+2t &=& -2 & L_2 \\ -5y-7z+5t &=& 0 & L_3 \longleftarrow L_3+L_2 \\ -7y-7z+7t &=& 0 & L_4 \longleftarrow L_4+L_2 \\ -y-z+t &=& 0 & L_5 \longleftarrow L_5-L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x\quad +3y+5z-4t &=& 1 & L_1 \\ +w\quad -2z+2t &=& -2 & L_2 \\ -y-z+t &=& 0 & L_5 \\ -2z &=& 0 & L_3-5L_5 \\ 0 &=& 0 & L_4-7L_5 \end{array}\right.$$

On voit que le système et de $\boxed{\text{rang } 4}$ et qu'on peut exprimer toutes les solutions en fonction de la variable t :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} z &=& 0 \\ y &=& t \\ w &=& -2-2t \\ x &=& 1-3t+4t=1+t \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}}$$

Solution de l'exercice 2.18

On utilise la méthode de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z+\frac{1}{4}t &=& 1 & L_1 \\ x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z+t &=& 2 & L_2 \\ 2x+\frac{1}{6}y+\frac{5}{6}z+\frac{5}{4}t &=& 3 & L_3 \\ 2x-\frac{2}{3}y+z+2t &=& 4 & L_4 \\ 4x+\frac{7}{6}y+\frac{3}{2}z+\frac{7}{4}t &=& 5 & L_5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z+\frac{1}{4}t &=& 1 & L_1 \\ -\frac{5}{6}y+\frac{1}{6}z+\frac{3}{4}t &=& 1 & L_2-L_1=L_2' \\ -\frac{5}{6}y+\frac{1}{6}z+\frac{3}{4}t &=& 1 & L_3-2L_1=L_3' \\ -\frac{5}{3}y+\frac{1}{3}z+\frac{3}{2}t &=& 2 & L_4-2L_1=L_4' \\ -\frac{5}{6}y+\frac{1}{6}z+\frac{3}{4}t &=& 1 & L_5-4L_1=L_5' \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z+\frac{1}{4}t &=& 1 & L_1 \\ -\frac{5}{6}y+\frac{1}{6}z+\frac{3}{4}t &=& 1 & L_2' \\ 0 &=& 0 & L_3'-L_2' \\ 0 &=& 0 & L_4'-2L_2' \\ 0 &=& 0 & L_5'-L_2' \end{array}\right.$$

Le système initial a même rang que le système échelonné obtenu, donc $\boxed{\text{le rang est 2.}}$ La résolution du système échelonné peut alors se faire en fonction de deux variables libres z et t :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & -\frac{6}{5}(1-\frac{1}{6}z-\frac{3}{4}t) = -\frac{6}{5}+\frac{1}{5}z+\frac{9}{10}t \\ x & = & 1-\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}z-\frac{1}{4}t = 1-\frac{1}{2}(-\frac{6}{5}+\frac{1}{5}z+\frac{9}{10}t)-\frac{1}{3}z-\frac{1}{4}t = \frac{8}{5}-\frac{13}{30}z-\frac{7}{10}t \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\left\{\left(\frac{8}{5}-\frac{13}{30}z-\frac{7}{10}t, -\frac{6}{5}+\frac{1}{5}z+\frac{9}{10}t, z, t\right) \,\middle|\, z,t\in\mathbb{R}\right\}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.19

Le système est équivalent au même système où on a ajouté la somme des équations :

$$(n+1)(x_1+\cdots+x_n) = 1+\cdots+n.$$

Après l'avoir divisé par $n+1$, on la retranche à chacune des autres lignes (c'est une opération de pivot) et on obtient alors qu'il y a une seule solution donnée par

$$\boxed{x_1 = 1-\frac{1+\cdots+n}{n+1},\ x_2 = 2-\frac{1+\cdots+n}{n+1},\ldots,x_n = n-\frac{1+\cdots+n}{n+1}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.21

Notons c le nombre de chars qui partent en pique-nique, et n ne nombre d'occupants par char au départ ; il y a donc nc participants au pique-nique. Lorsque, a mi-chemin de l'aller, dix chars sont en panne, il n'en reste plus que $c-10$ utilisables ; et chacun emporte un passager supplémentaire, soit $n+1$ passagers. Le nombre de passagers qui repartent est donc $(c-10)(n+1)$; comme aucun convive ne reste au bord de la route, il y en a autant qu'au départ, soit :

$$nc = (c-10)(n+1),$$

soit en développant et en simplifiant :

$$\boxed{0 = c-10n-10}$$

Lors du retour, lorsque quinze autres chars deviennent inutilisables, il n'en reste donc plus que $c-10-15 = c-25$; et chaque char emporte alors $n+3$ passager (trois de plus qu'au départ). Il y a donc $(c-25)(n+3)$ passager au total, et comme tous reviennent à Rome, on a :

$$nc = (c-25)(n+3),$$

soit en développant et en simplifiant :

$$\boxed{0 = 3c-25n-75.}$$

On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues n et c que l'on résout par la méthode de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcll} c-10n & = & 10 & L_1 \\ 3c-25n & = & 75 & L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} c-10n & = & 10 & L_1 \\ 5n & = & 45 & L_2-3L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} n & = & 9 \\ c & = & 10+10n = 100 \end{array}\right.$$

On conclut donc qu' $\boxed{\text{il y avait } c = 100 \text{ chars au départ et } nc = 900 \text{ participants.}}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.22

On résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcll} z+t & = & x & (Na) \\ 3z+s & = & x & (O) \\ 2s & = & x & (H) \\ z+t & = & 2y & (Br) \end{array}\right.$$

On trouve une infinité de solutions donnée par $(x,y,z,t,s) = (6z,3z,z,5z,3z)$ pour toute valeur de z. En chimie on peut prendre par exemple $z = 1$ d'où la réaction :

$$\boxed{6\,NaOH + 3\,Br_2 \longrightarrow NaBrO_3 + 5\,NaBr + 3\,H_2O.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.23

On introduit 6 inconnues $p_1,\dots,p_6$ qui sont les probabilités de chaque face. Les cinq conditions données donnent cinq équations linéaires en $p_1,\dots,p_6$. On ajoute la condition évidente suivante :

$$p_1 + \cdots + p_6 = 100\% = 1.$$

On résout le système et on trouve :

$$\boxed{p_{=}10\% \;\; p_2 = 10\% \;\; p_3 = 30\% \;\; p_4 = 20\% \;\; p_5 = 10\% \text{ et } p_6 = 20\%.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.25

On trouve :

$$P = -\frac{11}{6}X^4 - \frac{1}{2}X^3 + \frac{22}{3}X^2 - 1.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.30

- a une seule solution $x = y = z = 0$ si $\lambda \neq 2$
- a pour solutions (x,x,x) pour tout x réel si $\lambda = 2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.32

On a l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & -m(x+1) \\ 3x+3y+z & = & my \\ 3x+3y+z & = & -mz \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccrr} (1+m)x & +y & +z & = & -m \\ 3x & +(3-m)y & +z & = & 0 \\ 3x & +3y & +(1+m)z & = & 0 \end{array}\right.$$

On a donc affaire à un système d'équations linéaires que l'on résout par la méthode de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{cccrrl} (1+m)x & +y & +z & = & -m & L_1 \\ 3x & +(3-m)y & +z & = & 0 & L_2 \\ 3x & +3y & +(1+m)z & = & 0 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lccrrc} 3x & +(3-m)y & +z & = & 0 & L_2 \\ & my & +mz & = & 0 & L_3 - L_2 = L_3' \\ & (3-(1+m)(3-m))y & +(3-(1+m))z & = & -3m & 3L_1 - (1+m)L_2 = L_1' \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lccrrl} 3x & +(3-m)y & +z & = & 0 & L_2 \\ & my & +mz & = & 0 & L_3' \\ & (m^2-2m)y & +(2-m)z & = & -3m & L_1' \end{array}\right.$$

– $\boxed{\text{Si } m = 0}$ le système s'écrit alors :

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 3x & +3y & +z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

i.e.

$$\left\{\begin{array}{ll} z & = 0 \\ x & = -y \end{array}\right.$$

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\{(x, -x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}}$

– $\boxed{\text{Si } m \neq 0}$ on peut simplifier le système en divisant L'_3 par m, soit :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrc} 3x & +(3-m)y & +z & = & 0 & L_2 \\ & y & +z & = & 0 & \frac{1}{m}L'_3 = L''_3 \\ & (m^2-2m)y & +(2-m)z & = & -3m & L'_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrc} 3x & +(3-m)y & +z & = & 0 & L_2 \\ & y & +z & = & 0 & \frac{1}{m}L'_3 \\ & & (-(m^2-2m)+(2-m))z & = & -3m & L'_1 - (m^2-2m)L''_3 = L''_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrc} 3x & +(3-m)y & +z & = & 0 & L_2 \\ y & +z & = & 0 & L''_3 & \\ & & (-m^2+m+2)z & = & -3m & L''_1 \end{array}\right.$$

Comme $-m^2 + m + 2 = 0$ si et seulement si $m = -1$ ou $m = 2$ on distingue trois cas :

– $\boxed{\text{Si } m = -1}$ le système s'écrit alors :

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 3x & +4y & +z & = & 0 \\ y & +z & = & 0 & \\ & & 0 & = & 3 \end{array}\right. .$$

Il n'y a pas de solution.

– $\boxed{\text{Si } m = 2}$ le système s'écrit alors :

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 3x & +y & +z & = & 0 \\ y & +z & = & 0 & \\ & & 0 & = & -6 \end{array}\right.$$

Il n'y a pas de solution.

– $\boxed{\text{Si } m \neq 2 \text{ et } m \neq -1}$ on a un système de Cramer dont la solution est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{l} z = \dfrac{-3m}{-m^2+m+2} \\ y = -z = \dfrac{3m}{-m^2+m+2} \\ x = \frac{1}{3}((m-3)y - z) = \frac{(m-2)y}{3} = \dfrac{m(m-2)}{-m^2+m+2} = -\dfrac{m}{m+1} \end{array}\right.$$

En conclusion, l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{S=\begin{cases}\emptyset & \text{si } m\in\{-1,2\}\\ \{(x,-x,0)\mid x\in\mathbb{R}\} & \text{si } m=0\\ \left\{\left(-\dfrac{m}{m+1},\dfrac{3m}{-m^2+m+2},\dfrac{-3m}{-m^2+m+2}\right)\right\} & \text{si } m\in\mathbb{R}-\{0,-1,2\}\end{cases}}$$

Solution de l'exercice 2.34

On échelonne le système (génériquement). On trouve que :

$$\boxed{\operatorname{rang}(S)=\begin{cases}2 & \text{si } m\notin\{3,-3\}\\ 1 & \text{si } m\in\{3,-3\}.\end{cases}}$$

Solution de l'exercice 2.35

On échelonne le système (génériquement) :

$$(S)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} z+(m-2)x+2y & = & 0\\ 2(m-1)x+(m+4)y & = & 0\\ m(m-2)y & = & 0.\end{array}\right.$$

On voit donc que le rang est :

$$\boxed{\operatorname{rang}(S)=\begin{cases}3 & \text{si } m\notin\{0,1,2\}\\ 2 & \text{si } m\in\{0,1,2\}.\end{cases}}$$

Solution de l'exercice 2.37

– Si $m\notin\{1,2\}$ il y a une seule solution $x=\frac{m}{m-2}$ et $y=\frac{4m}{m-2}$.
– Si $m=2$ il n'y a pas de solution.
– Si $m=1$ il y a une infinité de solutions : $\left\{\left(\frac{1-y}{3},y\right)\;\middle|\; y\in\mathbb{R}\right\}$.

Solution de l'exercice 2.38

1. L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\begin{cases}\emptyset & \text{si } m=-4\\ \left\{\left(\dfrac{3\left(m+\frac{4}{9}\right)}{m+4},\dfrac{m+\frac{4}{3}}{m+4}\right)\right\} & \text{si } m\neq 4 \text{ et } m\neq -4\\ \left\{\left(\dfrac{9-4y}{7},y\right)\;\middle|\; y\in\mathbb{R}\right\} & \text{si } m=4\end{cases}}$$

2. L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\begin{cases}\emptyset & \text{si } m=0\\ \left\{\left(2,-\dfrac{1}{m}\right)\right\} & \text{si } m\neq 3 \text{ et } m\neq 0\\ \left\{\left(x,\dfrac{x-1}{3}\right)\;\middle|\; x\in\mathbb{R}\right\} & \text{si } m=3\end{cases}}$$

3. L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\begin{cases} \emptyset & \text{si } m = -\dfrac{7}{3} \\ \{(-z, 4-2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} & \text{si } m = 0 \\ \left\{ \left(\dfrac{12m+12}{3m+7}, \dfrac{4}{3m+7}, \dfrac{12}{3m+7} \right) \right\} & \text{si } m \neq 0 \text{ et } m \neq -\dfrac{7}{3} \end{cases}}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.39

On échelonne le système par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 & L_1 \\ x + \lambda y + z = \lambda & L_2 \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \lambda y + z = \lambda & L_2 \\ (1-\lambda^2)y + (1-\lambda)z = 1 - \lambda^2 & L_1 - \lambda L_2 = L_1' \\ (1-\lambda)y + (\lambda-1)z = \lambda^2 - \lambda & L_3 - L_2 = L_3' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \lambda y + z = \lambda & L_2 \\ (1-\lambda)y + (\lambda-1)z = \lambda^2 - \lambda & L_3' \\ ((1-\lambda) - (\lambda+1)(\lambda-1))z = (1-\lambda^2) - (\lambda+1)(\lambda^2-\lambda) & L_1' - (\lambda+1)L_3' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \lambda y + z = \lambda & L_2 \\ (1-\lambda)y + (\lambda-1)z = \lambda^2 - \lambda & L_3' \\ (1-\lambda)(\lambda+2)z = (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \end{cases}.$$

$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est différent de 1 et } -2,}$ les coefficients diagonaux du système triangulaire obtenu sont non nuls ; ainsi
$\boxed{\text{le système admet une unique solution}}$, donnée par :

$$\boxed{\begin{cases} z = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \\ y = \frac{1}{1-\lambda}\left((\lambda^2-\lambda) - (\lambda-1)\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\right) = -\lambda + \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} = \frac{1}{\lambda+2} \\ x = \lambda - \lambda\frac{1}{\lambda+2} - \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}. \end{cases}}$$

$\boxed{\text{Cas } \lambda = 1.}$
Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ x + y + z & = 1 \\ x + y + z & = 1 \end{cases}.$$

Il se réduit ainsi à la seule équation $x + y + z = 1$. Les solutions sont donc $\boxed{\text{de la forme } (x, y, 1 - x - y)}$, pour tous les réels x et y.

$\boxed{\text{Cas } \lambda = -2.}$
Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 & L_1 \\ x - 2y + z = -2 & L_2 \\ x + y - 2z = 4 & L_3 \end{cases}.$$

La méthode du pivot de Gauss donne le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + z = -2 & L_2 \\ -3y + 3z = -3 & L_1 + 2L_2 \\ 3y - 3z = 6 & L_3 - L_2, \end{cases}$$

et l'on constate que les deux dernières lignes sont incompatibles. Il n'y a donc $\boxed{\text{pas de solution.}}$

Solution de l'exercice 2.41

4. L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{S = \begin{cases} \left\{ \left(\dfrac{1-2a-a^{+}a^3}{1-a}, \dfrac{a}{1-a}, a^2+a \right) \right\} & \text{si } a \neq 1 \\ \emptyset & \text{si } a = 1 \end{cases}}$$

Solution de l'exercice 2.44

1. $f(x) = 0$.
2. $\exists x \in X,\ f(x) = 0$.
3. $\forall x \in X,\ f(x) = 0$.
4. $\forall x \in X,\ f(x) \neq 0$.
5. $\forall k \in \mathbb{Z},\ \sin(k\pi)(x) = 0$.
6. $\forall x \in \mathbb{R},\quad \sin x = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi)$.
7. $\exists y_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = y_0$
   ou bien : $\forall x, x' \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x')$.
8. $\forall y_0 \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq y_0$
   ou bien : $\exists x, x' \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(x')$.

Solution de l'exercice 2.47

1. Non car sinon on aurait : $f(1) = f(1^2) = 1$ et $f(1) = f((-1)^2) = -1$.
2. Oui, par exemple f définie par : $f(y) = y - 1$.

Solution de l'exercice 2.49

1. **Cas où $f(0) \neq 0$:**
   En prenant $x' = 0$ dans la relation (R), pour tout x on a :

$$f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0) + f(0)f(x)$$

$$\Leftrightarrow 0 = f(0) + f(0)f(x)$$

$$\Leftrightarrow 0 = f(0)(1 + f(x))$$

$$\Leftrightarrow 1 + f(x) = 0 \qquad (\text{car} f(0) \neq 0).$$

   Donc, pour tout x, on a $f(x) = -1$ *i.e.* $\boxed{f \text{ est la fonction constante qui vaut -1.}}$

2. **Cas où il existe x_0 tel que $f(x_0) = -1$:**
   En prenant $x' = x_0$ dans la relation (R), pour tout x on a :

$$\begin{aligned} f(x+x_0) &= f(x) + f(x_0) + f(x_0)f(x) \\ &= f(x) - 1 - f(x) \\ &= -1 \end{aligned}$$

   Comme c'est vrai pour tout x, on peut remplacer x par $x - x_0$; on obtient alors : $f(x) = f((x - x_0) + x_0) = -1$ Donc, pour tout x, on a $f(x) = -1$ *i.e.* $\boxed{f \text{ est la fonction constante qui vaut -1.}}$

3. **Relation $f(x)+1>0$:**

   En appliquant la relation (R) avec $\frac{x}{2}$ et $\frac{x}{2}$ on trouve :

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ f(x)+1 &= 1+2f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ &= \left(1+f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \end{aligned}$$

   Or par hypothèse $f\left(\frac{x}{2}\right) \neq -1$, donc $\left(1+f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$, d'où le résultat.

4. **Relation $f(nx) = (f(x)+1)^n - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$:**

   Montrons $\boxed{\text{par récurrence}}$ sur $n \geqslant 0$ la relation $\mathcal{R}(n)$ suivante :

$$f(nx) = (f(x)+1)^n - 1.$$

   - La relation $\mathcal{R}(0)$ signifie : $f(0) = (f(x)+1)^0 - 1$.
     Elle est vraie car $y^0 = 1$ pour tout y.
   - Si la relation $\mathcal{R}(n)$ est vraie *i.e.*

$$f(nx)+1 = (f(x)+1)^n$$

     alors :

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= f(nx+x) \\ &= f(nx)+f(x)+f(x)f(nx) && \text{d'après } (R) \\ &= (f(x)+1)(f(nx)+1)-1 \\ &= (f(x)+1)(f(x)+1)^n - 1 && \text{d'après } \mathcal{R}(n) \\ &= (f(x)+1)^{n+1}-1 \end{aligned}$$

     Donc la relation $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.50

La fonction f est donnée par :

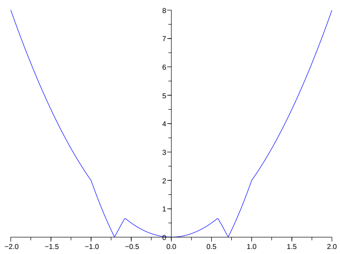
$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -3x+8 & \text{si } x \leqslant \frac{3}{2} \\ x+2 & \text{si } \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 5 \\ 3x-8 & \text{si } 5 \leqslant x. \end{cases}}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.51

1. La fonction f est donnée par :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ 4x^2-2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 2-4x^2 & \text{si } -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 2x^2 & \text{si } -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 2-4x^2 & \text{si } \dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 4x^2-2 & \text{si } \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x^2 & \text{si } 1 \leqslant x. \end{cases}}$$

2.



3. L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\boxed{\left\{ -\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3} \right\}.}$$

Solution de l'exercice 2.54

11. **Inéquation $||x|-5| \geqslant ||3x|-3|$:**
On écrit l'inéquation sous la forme :

$$||x|-5| - ||3x|-3| \geqslant 0,$$

et on explicite la valeur puis le signe du premier membre en fonction de x :

x		-5		-2		-1		0		1		2		5	
$\lvert x\rvert - 5$				$-x-5$				$\lvert$				$x-5$			
$\lvert\lvert x\rvert - 5\rvert$	$-x-5$	$\lvert$		$x+5$				$\lvert$				$5-x$		$\lvert$	$x-5$
$\lvert 3x\rvert - 3$				$-3x-3$				$\lvert$				$3x-3$			
$\lvert -3x\rvert - 3\rvert$				$-3x-3$		$\lvert$	$3x+3$	$\lvert$	$-3x+3$	$\lvert$		$3x-3$			
$\lvert\lvert x\rvert - 5\rvert - \lvert -3x\rvert - 3\rvert$	$2x-2$	$\lvert$		$4x+8$		$\lvert$	$-2x+2$	$\lvert$	$2x+2$	$\lvert$		$-4x+8$		$\lvert$	$-2x-2$
signe	$-$	$\lvert$	$-$	0	$+$	$\lvert$	$+$	$\lvert$	$+$	$\lvert$	$+$	0	$-$	$\lvert$	$-$

L'ensemble des solutions est donc l'intervalle : $\boxed{[-2;2].}$

Solution de l'exercice 2.55

On distingue deux cas :

1. Si $\frac{5x}{6} - \frac{1}{2} \geqslant 0$, soit $x \geqslant \frac{3}{5}$, alors l'inéquation s'écrit :
$$x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{6} + \left(\frac{5x}{6} - \frac{1}{2}\right) \leqslant 0$$
soit
$$x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \leqslant 0.$$
Le calcul montre que le trinôme correspondant admet deux racines réelles distinctes : -1 et $\frac{2}{3}$. Il est donc négatif ou nul sur l'intervalle $\left[-1, \frac{2}{3}\right]$, soit, en tenant compte de la condition $x \geqslant \frac{3}{5}$: $\boxed{\left[\frac{3}{5}, \frac{2}{3}\right],}$ puisque $\frac{3}{5} \leqslant \frac{2}{3}$.
2. Si $\frac{5x}{6} - \frac{1}{2} < 0$, soit $x < \frac{3}{5}$, alors l'inéquation s'écrit :
$$x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{6} - \left(\frac{5x}{6} - \frac{1}{2}\right) \leqslant 0$$
soit
$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \leqslant 0.$$
Le calcul montre que le trinôme correspondant admet deux racines réelles distinctes : 1, $\frac{1}{3}$. Il est donc négatif ou nul sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$, soit, en tenant compte de la condition $x < \frac{3}{5}$: $\boxed{\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right[.}$

L'ensemble des solutions est donné par la réunion des solutions obtenues dans ces deux cas à savoir
$$\boxed{x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right].}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.56

1. **Valeurs de x pour lesquelles l'inéquation a un sens :**
Il faut et il suffit que l'expression $|x^2 - x| - 2x + 2$ soit positive ou nulle ; on est donc amené à faire une étude de signe :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\lvert x^2 - x\rvert$		$x^2 - x$	|	$-x^2 + x$	|	$x^2 - x$	
$\lvert x^2 - x\rvert - 2x + 2$		$x^2 - 3x + 2$	|	$-x^2 - x + 2$	|	$x^2 - 3x + 2$	

Le trinôme $X^2 - 3X + 2$ a pour racines 1 et 2 ; il est donc positif ou nul sur $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$. Le trinôme $-X^2 - X + 2$ a pour racines 1 et -2 ; il est donc positif ou nul sur $[-2, 1]$. L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'inéquation est bien définie est donc :
$$\boxed{((]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[) \cap (]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[)) \cup (]0, 1[\cap [-2, 1]) = \mathbb{R} -]1, 2[.}$$

2. **Résolution de l'inéquation :**
Pour tout $x \in \mathbb{R} -]1, 2[$ comme les deux membres de l'inéquation sont (définis) et positifs, puisque toute racine carrée est positive, on peut élever au carré, *i.e.* l'inéquation équivaut à :
$$|x^2 - x| - 2x + 2 \leqslant 4,$$
soit
$$|x^2 - x| - 2x - 2 \leqslant 0.$$

On fait alors une étude de signe analogue à la précédente :

x		0		1	
$\lvert x^2-x\rvert$	x^2-x	$\mid$	$-x^2+x$	$\mid$	x^2-x
$\lvert x^2-x\rvert-2x-2$	x^2-3x-2	$\mid$	$-x^2-x-2$	$\mid$	x^2-3x-2

Le trinôme X^2-3X-2 a pour racines $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$; il est donc négatif ou nul sur $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$. Le trinôme $-X^2-X-2$ n'a pas de racines réelles ; il est donc toujours négatif ou nul. L'ensemble des solutions est donc :

$$\left((]-\infty,0]\cup[1,+\infty[)\cap\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2},\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]\right)\cup(]0,1[\cap\mathbb{R})\cap(\mathbb{R}-]1,2[)$$

$$\boxed{=\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2},1\right]\cup\left[2,\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right].}$$

Solution de l'exercice 2.57

Comme une valeur absolue est toujours positive, pour tout x on a : $|x^2-1|+1>0$
Ainsi l'inéquation a un sens pour tout x et elle est équivalente à :

$$x^2+\sqrt{2}x \geqslant |x^2-1|+1,$$

soit :

$$\boxed{x^2+\sqrt{2}x-1-|x^2-1|\geqslant 0.}$$

Or

$$|x^2-1|=\begin{cases}x^2-1 & \text{si } x\notin[-1,1]\\ 1-x^2 & \text{si } x\in[-1,1]\end{cases}$$

L'équation est donc équivalente à :

$$\begin{cases}2x^2+\sqrt{2}x-2\geqslant 0\\ x\in[-1,1]\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}\sqrt{2}x\geqslant 0\\ x\notin[-1,1]\end{cases}$$

Le trinôme $2x^2+\sqrt{2}x-2$ ayant deux racines réelles $-\sqrt{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ l'ensemble des solutions du premier système est

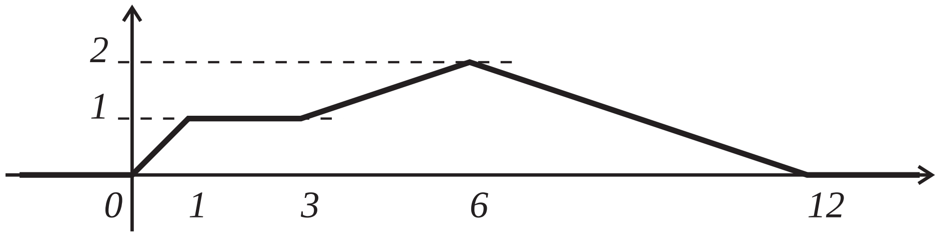
$$\left(\left]-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[\right)\cap[-1,1]=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$$

L'ensemble des solution du second système est clairement $]1,+\infty[$. Au total l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[.}$$

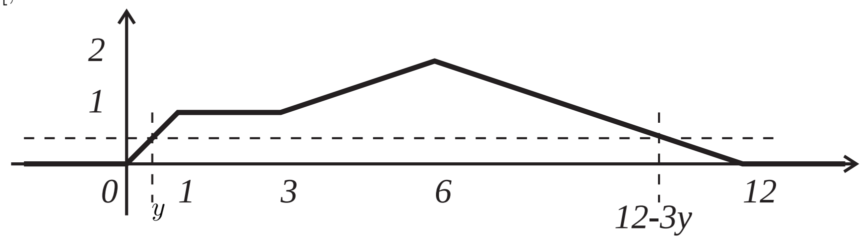
Solution de l'exercice 2.61

1. **Allure du graphe de f :**



2. **Solution de l'inéquation $f(x) > y$, pour $y \geqslant 0$:**

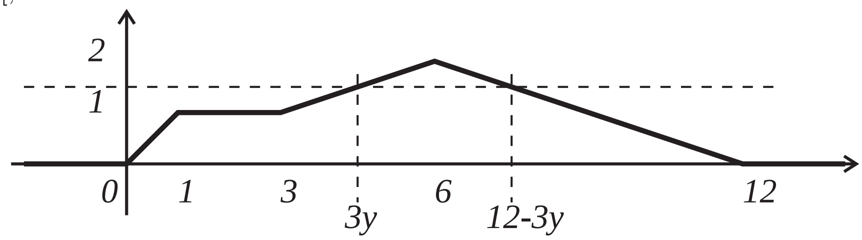
   – si $y \in [0, 1[$, alors :



   – si $x \in]-\infty, 0[\cup[12, +\infty[$, alors $f(x) = 0 \leqslant y$,
   – si $x \in [0, 1[$, $f(x) > y$ équivaut à $x > y$,
   – si $x \in [1, 6[$, dans les deux cas, on vérifie que $f(x) \geqslant 1 > y$,
   – si $x \in [6, 12[$, $f(x) > y$ équivaut à $4 - \frac{x}{3} > y$ soit $x < 12 - 3y$,
   donc au total $f(x) > y$ équivaut à :

$$x \in]y, 1[\cup[1, 6[\cup[6, 12 - 3y[=]y, 12 - 3y[.$$

   – si $y \in [1, 2[$, alors :



   – si $x \in]-\infty, 0[\cup[12, +\infty[$, alors $f(x) = 0 < y$,
   – si $x \in [0, 3[$, $f(x) \leqslant 1 \leqslant y$,
   – si $x \in [3, 6[$, $f(x) > y$ équivaut à $\frac{x}{3} > y$, soit $x > 3y$,
   – si $x \in [6, 12[$, $f(x) > y$ équivaut à $4 - \frac{x}{3} > y$ soit $x < 12 - 3y$,
   donc au total $f(x) > y$ équivaut à $x \in]3y, 12 - 3y[$.

   – si $y \geqslant 2$, dans tous les cas, on a $f(x) \leqslant 2 \leqslant y$, donc il n'y a pas de solution.

   En résumé

$$\boxed{S_y = \begin{cases}]y, 12 - 3y[& \text{si } y \in [0, 1[\\ ]3y, 12 - 3y[& \text{si } y \in [1, 2[\\ \emptyset & \text{si } y \geqslant 2. \end{cases}}$$

   C'est donc bien soit vide, soit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

3. **Calcul de $g(0)$, puis $g(y)$:**

   L'étude précédente indique que $g(0) = 12$, puisque $S_0 =]0, 12[$. De même

$$g(y) = (12 - 3y) - 3y = 12 - 6y \text{ si } y \in]1, 2[.$$

Plus généralement :

$$\boxed{g(y) = \begin{cases} 12-4y & \text{si } y \in [0,1[\\ 12-6y & \text{si } y \in [1,2[\\ 0 & \text{si } y \geqslant 2. \end{cases}}$$

Solution de l'exercice 2.73

C'est la suite constante qui vaut 1.

Solution de l'exercice 2.75

En calculant les premiers termes on devine que $u_n = n+1$ et on le montre par récurrence.

Solution de l'exercice 2.78

1. L'équation caractéristique a une racine double, 2 *i.e.* $u_n = (\lambda n + \mu)2^n$. Alors

$$\begin{cases} u_0 = 1 & = & \mu \\ u_1 = 4 & = & 2(\lambda+\mu) \end{cases}$$

d'où $\boxed{u_n = 2^n(n+1).}$

2. L'équation caractéristique a deux racines 1 et 2 *i.e.* $u_n = \lambda 2^n + \mu 1^n$. Alors

$$\begin{cases} u_1 = 1 & = & 2\lambda+\mu \\ u_2 = 3 & = & 4\lambda+\mu \end{cases}$$

d'où $\boxed{u_n = 2^n - 1.}$

4. L'équation caractéristique est : $x^2 - 3x - 4 = 0$. Après calculs on trouve deux racines distinctes -1 et 4. La suite (u_n) est donc de la forme

$$u_n = \alpha(-1)^n + \beta 4^n.$$

On trouve α et β grâce à $u_0 = u_1 = 2$, ce qui donne :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha + \beta = 2 \\ u_1 = -\alpha + 4\beta = 2 \end{cases},$$

d'où après calcul : $(\alpha, \beta) = \left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$. Donc : $\boxed{u_n = \frac{1}{5}\left(6(-1)^n + 4^{n+1}\right).}$

Solution de l'exercice 2.80

Notons que si (u_n) une suite arithmétique de raison r alors :

$$u_2 = u_1 + r \text{ et } u_3 = u_2 + r,$$

soit

$$r = u_2 - u_1 = u_3 - u_2.$$

Réciproquement si trois nombres u_1, u_2, u_3 vérifient $u_2 - u_1 = u_3 - u_2$, alors il est clair que la suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison $u_2 - u_1$ a pour trois premier termes : u_1, u_2, u_3. Ainsi on a montré que trois nombres u_1, u_2, u_3 sont les trois premiers termes d'une suite arithmétique si et seulement s'ils vérifient : $u_2 - u_1 = u_3 - u_2$
soit :

$$\boxed{2u_2 - u_3 - u_1 = 0.}$$

1. **Lorsque a^2, b^2, c^2 forment le début d'une suite arithmétique :**
Remarquons que :

$$\begin{aligned}\frac{2}{a+c}-\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b} &= \frac{2(b+c)(a+b)-(a+c)(a+b)-(a+c)(b+c)}{(a+c)(b+c)(a+b)} \\ &= \frac{2b^2+2ab+2ac+2bc-(a^2+ab+ac+bc)-(c^2+ac+bc+ab)}{(a+c)(b+c)(a+b)} \\ &= \frac{2b^2-a^2-c^2}{(a+c)(b+c)(a+b)}\end{aligned}$$

Ainsi on voit que :

$$\frac{2}{a+c}-\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b} \Leftrightarrow 2b^2-a^2-c^2,$$

d'où il résulte que a^2, b^2, c^2 sont les trois premiers termes d'une suite arithmétique **si et seulement si** c'est le cas de $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$.

2. **Réciproque :**
Déjà traité juste avant.

3. **Cas de a^2-bc, b^2-ca, c^2-ab :**
On remarque que :

$$\begin{aligned}2(b^2-ca)-(a^2-bc)-(c^2-ab) &= 2b^2+bc+ab-a^2-c^2-2ac \\ &= 2b^2+b(a+c)-(a+c)^2 \\ &= (2b-(a+c))(b+(a+c))\end{aligned}$$

Ainsi si a, b, c sont les premiers termes d'une suite arithmétique, *i.e.* $2b-a-b=0$, alors a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab sont aussi les premiers termes d'une suite arithmétique. Par contre **la réciproque n'est pas vraie** puisqu'on peut avoir $2(b^2-ca)-(a^2-bc)-(c^2-ab)=0$ alors que $2b-a-c\neq 0$: il suffit pour cela que $a+b+c=0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.84

1. **La suite (u_n) est bien définie :**
La fonction f n'est pas définie lorsque $2x+a=0$ soit $\boxed{x=-\frac{a}{2}.}$ Pour que la suite (u_n) soit bien définie il faut et il suffit qu'aucun terme ne vaille $-\frac{a}{2}$, de sorte que le terme suivant soit bien défini lui aussi. Comme a est strictement positif, on a $-\frac{a}{2}<0$; il suffit donc de montrer que tous les termes sont positifs. Pour cela montrons $\boxed{\text{par récurrence}}$ sur $n \geqslant 0$ la relation : "le terme u_n est bien défini et strictement positif".
– la relation est vraie pour $n=0$ car u_0 est donné et strictement positif
– si la relation est vraie à l'ordre n , alors on a $u_n>0$. Donc

$$2u_n+a>a>0 \text{ et } au_n+2>2>0,$$

donc le quotient est bien défini et strictement positif ; c'est u_{n+1}.
Remarque : la démonstration précédente ne fait que reprendre la démarche de la proposition 2.4.3 que l'on peut aussi utiliser directement en expliquant que :

$$\forall x>0,\ f(x)>0.$$

Par contre il n'est pas vrai que :

$$\forall x\neq -\frac{a}{2},\ f(x)\neq -\frac{a}{2}$$

2. **Relation entre v_{n+1} et v_n :**
On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} \\
&= \frac{f(u_n)-1}{f(u_n)+1} \\
&= \frac{\frac{au_n+2}{2u_n+a}-1}{\frac{au_n+2}{2u_n+a}+1} \\
&= \frac{\frac{au_n+2-(2u_n+a)}{2u_n+a}}{\frac{au_n+2+(2u_n+a)}{2u_n+a}} \\
&= \frac{au_n+2-(2u_n+a)}{au_n+2+(2u_n+a)} \\
&= \frac{(a-2)u_n+(2-a)}{(a+2)u_n+(2+a)} \\
&= \frac{a-2}{a+2}\frac{u_n-1}{u_n+1} \\
&= \frac{a-2}{a+2}v_n
\end{aligned}$$

Donc finalement

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{a-2}{a+2}v_n.}$$

3. **Expression de v_n :**
D'après la question précédente on voit que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{a-2}{a+2}$. Donc on peut exprimer le terme général en fonction de n et du premier terme *i.e.* :

$$v_n = \left(\frac{a-2}{a+2}\right)^n v_0,$$

soit :

$$\boxed{v_n = \left(\frac{a-2}{a+2}\right)^n \frac{u_0-1}{u_0+1}.}$$

4. **Expression de u_n :**
De

$$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1},$$

on déduit :

$$(u_n+1)v_n = u_n - 1,$$

soit :

$$u_n v_n + v_n = u_n - 1,$$

soit :

$$u_n v_n - u_n = -v_n - 1,$$

soit :

$$u_n(v_n - 1) = -v_n - 1,$$

soit, comme $v_n \neq 1$ (puisque $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$) :

$$u_n = \frac{v_n + 1}{1 - v_n},$$

soit, d'après la question précédente :

$$\boxed{u_n = \frac{\left(\frac{a-2}{a+2}\right)^n \frac{u_0-1}{u_0+1} + 1}{1 - \left(\frac{a-2}{a+2}\right)^n \frac{u_0-1}{u_0+1}}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.85

1. La suite de terme générale $\dfrac{u_n}{n}$ est géométrique.
2. On trouve $\boxed{u_n = 2^{-\frac{1}{2} + \frac{3^n}{2}}.}$
3. On trouve $\boxed{u_n = 2^{2^n - 1}.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.86

1. Notons u_n la population du pays à l'année n. D'après les indications de l'énoncé la population diminue de 1% chaque année, soit :

$$\forall n,\ u_{n+1} = \frac{99}{100} u_n.$$

   On a donc : $u_n = \left(\frac{99}{100}\right)^n u_0$.
   La population aura diminué de la moitié (au moins) lorsque $u_n \leqslant \frac{u_0}{2}$,
   soit : $\left(\frac{99}{100}\right)^n u_0 \leqslant \frac{u_0}{2}$
   soit, puisque $u_0 > 0$: $\left(\frac{99}{100}\right)^n \leqslant \frac{1}{2}$
   soit, puisque la fonction ln est strictement croissante : $n \ln\left(\frac{99}{100}\right) \leqslant \ln \frac{1}{2}$
   soit : $n \geqslant \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln\left(\frac{99}{100}\right)} \simeq 68,9$ soit $\boxed{n \geqslant 69 \text{ ans.}}$
2. La situation es modélisée par :

$$u_0 = 100\,000 \text{ et } u_{n+1} = \frac{99}{100} u_n - 1000.$$

   NB : une modélisation par :

$$u_{n+1} = \frac{99}{100}(u_n - 1000)$$

   serait acceptable aussi ; elle donnerait un résultat proche.
   Le calcul donne de même : $n \geqslant \frac{\ln \frac{3}{4}}{\ln\left(\frac{99}{100}\right)} \simeq 28,6$
   soit $\boxed{n \geqslant 29 \text{ ans.}}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.87

Notons u_n nombre de couples de lapins au n^{e} mois ; on a :

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

En effet s'il y a u_n couples au mois n, ils se répartissent en u_{n-1} âgés de plus d'un mois et $u_n - u_{n-1}$ qui sont nés le mois précédent. Le mois suivant il y en aura donc :

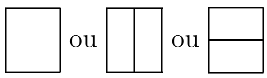
$$u_{n+2} = 2u_{n-1} + u_n - u_{n-1} = u_{n+1} + u_n.$$

Le calcul complet du terme général de cette suite récurrente linéaire d'ordre deux donne alors :

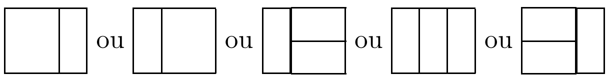
$$\boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.88

1. **Calcul de u_2 :**
   Un carré de coté 2 peut être pavé par un carré de coté de 2 ou bien par deux rectangles de cotés 1 et 2, mais il y a deux manières de les positionner. On a donc $\boxed{u_2 = 3 :}$

   Calcul de u_3 :
   On a les pavages possibles suivants :

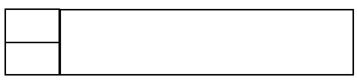
   On a donc $\boxed{u_3 = 5.}$
2. **Relation entre u_{n+2}, u_{n+1} et u_n :**
   Pour former un pavage du rectangle de longueur $n+2$ et de largeur 2, si on commence par remplir la gauche du rectangle ; il n'y a que trois possibilités :
   – on place un carré de coté 2 ; il reste alors un rectangle $n \times 2$ à paver ; il y a donc u_n pavages de ce type :

   – on place un rectangle 1×2 dans le sens de la largeur ; il reste alors un rectangle $(n+1) \times 2$ à paver ; il y a donc u_{n+1} pavages de ce type :

   – on place un rectangle 1×2 dans le sens de la longueur ; on est alors obligé d'en placer un autre parallèlement, et cote à cote ; il reste alors un rectangle $n \times 2$ à paver ; il y a donc u_n pavages de ce type :

   On obtient donc la relation $\boxed{u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.}$
3. **Calcul de u_n :**
   La suite (u_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et on connaît ses premiers termes. On sait donc calculer son terme général en fonction de n. L'équation caractéristique est :

   $$x^2 = x + 2,$$

qui a pour racines 2 et -1. Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout n :

$$u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n.$$

On calcule λ et μ par :

$$\begin{cases} 3 = u_2 = \lambda + 4\mu \\ 5 = u_3 = -\lambda + 8\mu \end{cases} \Leftrightarrow \mu = \frac{2}{3} \text{ et } \lambda = \frac{1}{3}.$$

D'où finalement, après simplifications :

$$\boxed{u_n = \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}.}$$

Solution de l'exercice 2.89

La suite vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est :

$$x^2 - \frac{m^2}{m-1}x + \frac{m+1}{m-1} = 0.$$

Son discriminant vaut :

$$\Delta = \left(\frac{m^2}{m-1}\right)^2 - 4\frac{m+1}{m-1} = \frac{m^4 - 4m^2 + 4}{(m-1)^2} = \left(\frac{m^2-2}{m-1}\right)^2.$$

– <u>Si $m^2 - 2 \neq 0$, soit $m \notin \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$:</u>
Alors l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{m-1} + \frac{m^2-2}{m-1}\right) = \frac{m^2-1}{m-1} = m+1$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{m-1} - \frac{m^2-2}{m-1}\right) = \frac{1}{m-1}.$$

Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout n :

$$u_n = \lambda(m+1)^n + \frac{\mu}{(m-1)^n}.$$

Calcul de λ, μ :

$$\begin{cases} u_0 = 0 = \lambda + \mu \\ u_1 = 1 = \lambda(m+1) + \frac{\mu}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{m-1}{m^2-2} \\ \mu = \frac{1-m}{m^2-2} \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{u_n = \frac{m-1}{m^2-2}\left((m+1)^n - \frac{1}{(m-1)^n}\right).}$$

– <u>Si $m = \sqrt{2}$:</u> Alors l'équation caractéristique possède une racine double

$$x_1 = \frac{m^2}{2(m-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 1 + \sqrt{2}.$$

Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout n :

$$u_n = (\lambda n + \mu)(1 + \sqrt{2})^n.$$

Calcul de λ, μ :

$$\begin{cases} u_0 = 0 = \mu \\ u_1 = 1 = (\lambda+\mu)(1+\sqrt{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{u_n = n(1+\sqrt{2})^{n-1}.}$$

– Si $m = -\sqrt{2}$: De manière analogue au cas précédent on trouve :

$$\boxed{u_n = n(1-\sqrt{2})^{n-1}.}$$

Solution de l'exercice 2.92

5. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la relation $\mathcal{R}(n)$ suivante :

$$(1^5+2^5+\cdots+n^5)+(1^7+2^7+\cdots+n^7) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4.$$

   – Pour $n=1$ la relation signifie : $1^5+1^7 = 2\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^4$. Elle est donc vraie.
   – Si la relation $\mathcal{R}(n)$ est vraie alors :

$$\begin{aligned}
& (1^5+2^5+\cdots+n^5+(n+1)^5)+(1^7+2^7+\cdots+n^7+(n+1)^7) \\
= \;& 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4 + (n+1)^5+(n+1)^7 \text{ d'après } \mathcal{R}(n) \\
= \;& \frac{(n+1)^4}{8}\left(n^4+8(n+1)+8(n+1)^3\right) \\
= \;& \frac{(n+1)^4}{8}\left(n^4+8n+8+8(n^3+3n^2+3n+1)\right) \\
= \;& \frac{(n+1)^4}{8}\left(n^4+8n^3+24n^2+32n+16\right) \\
= \;& \frac{(n+1)^4}{8}(n+2)^4 \\
= \;& 2\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^4
\end{aligned}$$

   Donc la relation $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie.

Solution de l'exercice 2.95

On trouve : $\boxed{S = 2\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - \frac{3}{4}\right) - \frac{n}{2}.}$

Solution de l'exercice 2.106

D'après le théorème de Fubini, on peut intervertir les signes "somme" :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{j^2}{i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j^2}{i}.$$

Après calculs on obtient :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{j^2}{i} = n \times \frac{4n^2+15n+17}{36}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.108

1. **Relation** $\sum_{j=1}^{2n}(-1)^j\, b_j = \sum_{k=1}^{n}(b_{2k} - b_{2k-1})$ **:**

   Les entiers de 1 à $2n$ sont soit pairs, soit impairs *i.e.* on a la réunion disjointe :

$$\begin{aligned}\{1,\dots,2n\} &= \{2,4,6,\dots,2n\} \cup \{1,3,5,\dots,2n-1\}\\ &= \{2k \mid 1 \leqslant k \leqslant n\} \cup \{2k-1 \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}\end{aligned}$$

   Donc d'après la relation de Chasles pour les sommes on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2n}(-1)^j\, b_j &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{2k}\, b_{2k} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{2k-1}\, b_{2k-1}\\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{2k} - \sum_{k=1}^{n} b_{2k-1} \text{ car } (-1)^{2k} = 1 \text{ et } (-1)^{2k-1} = -1\\ &= \sum_{k=1}^{n}(b_{2k} - b_{2k-1}) \text{ d'après la linéarité de la sommation}\end{aligned}$$

   Autre méthode : raisonner par récurrence en remarquant que :

$$\sum_{j=1}^{2(n+1)} (-1)^j\, b_j = \left(\sum_{j=1}^{2n}(-1)^j\, b_j\right) - b_{2n+1} + b_{2n+2}.$$

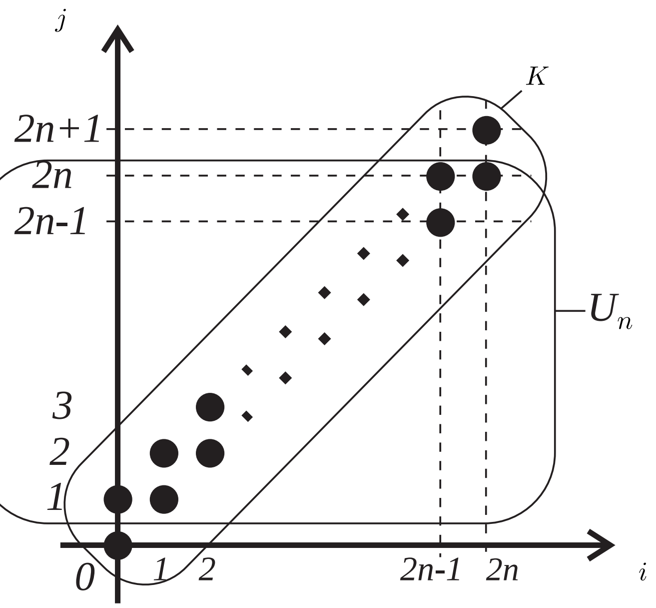
   Calcul de $S_n = \sum_{j=1}^{2n}(-1)^j j$ **:**

   On applique la relation précédente avec $b_j = j$. On obtient :

$$\sum_{j=1}^{2n}(-1)^j j = \sum_{k=1}^{n}(2k) - (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

   Ainsi : $\boxed{\sum_{j=1}^{2n}(-1)^j j = n.}$

2. **Représentation de** K **:**



Relation entre U_n et T_n :

D'après la définition de K on a : $T_n = \sum_{(i,j)\in K} a_{i,j}$. Par contre, on voit sur le dessin que l'ensemble des indices de la somme U_n n'est pas tout à fait K puisque :

$$K = \{(i,j) \mid 1 \leqslant j \leqslant 2n \text{ et } j-1 \leqslant i \leqslant j\} \cup \{(0,0),(2n,2n+1)\}.$$

Donc :

$$U_n = \left(\sum_{(i,j)\in K} a_{i,j}\right) - a_{0,0} - a_{2n,2n+1}.$$

D'où : $\boxed{T_n = U_n + a_{0,0} + a_{2n,2n+1}.}$

3. **Calcul de V_n :**

D'après le résultat précédent appliqué lorsque $a_{i,j} = \dfrac{(-1)^{i+1}(j^3+j^2)}{i+1}$ on a :

$$\begin{aligned}
V_n &= \sum_{j=1}^{2n}\left(\sum_{i=j-1}^{j}\frac{(-1)^{i+1}(j^3+j^2)}{i+1}\right) + 0 + \frac{(-1)^{2n+1}((2n+1)^3+(2n+1)^2)}{2n+1}\\
&= \sum_{j=1}^{2n}\left(\frac{(-1)^j(j^3+j^2)}{j} + \frac{(-1)^{j+1}(j^3+j^2)}{j+1}\right) - ((2n+1)^2+(2n+1))\\
&= \left(\sum_{j=1}^{2n}(-1)^j\left((j^2+j)-j^2\right)\right) - (2n+1)(2n+2)\\
&= \sum_{j=1}^{2n}(-1)^j j - (2n+1)(2n+2)\\
&= n-(2n+1)(2n+2) \text{ d'après le résultat de la question 1}\\
&= -4n^2-5n-2
\end{aligned}$$

Ainsi on a : $\boxed{V_n = S_n - (2n+1)(2n+2) = -4n^2-5n-2.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.119

1. **Question de cours :**

$$S_0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n,\ S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\ S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. **Expression de $(k+1)^{p+1} - k^{p+1}$:**
   On a :

$$\begin{aligned}(k+1)^{p+1} &= \sum_{i=0}^{p+1} C_{p+1}^i k^i \quad \boxed{\text{d'après la formule du binôme}} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{p} C_{p+1}^i k^i\right) + k^{p+1} \quad \text{(relation de Chasles)}\end{aligned}$$

   soit

$$\boxed{(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{i=0}^{p} C_{p+1}^i k^i}$$

3. **Expression de S_p :**
   D'après la question précédente, $\boxed{\text{en sommant les relations}}$ obtenues pour toutes les valeurs de k entre 1 et n on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^p - k^p = \sum_{i=0}^{p} C_{p+1}^i S_i.$$

   Le premier membre se simplifie par $\boxed{\text{télescopage ;}}$ on obtient :

$$(n+1)^{p+1} - 1 = \sum_{i=0}^{p} C_{p+1}^i S_i = \left(\sum_{i=0}^{p-1} C_{p+1}^i S_i\right) + C_{p+1}^p S_p,$$

   d'où :

$$S_p = \frac{1}{C_{p+1}^p}\left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{i=0}^{p-1} C_{p+1}^i S_i\right),$$

   soit encore

$$\boxed{S_p = \frac{1}{p+1}\left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{i=0}^{p-1} C_{p+1}^i S_i\right).}$$

4. **Calcul de S_3 :**
   En appliquant la relation précédente pour $p = 3$ on trouve :

$$\begin{aligned}S_3 &= \frac{1}{4}\big((n+1)^4 - 1 - S_0 - 4S_1 - 6S_2\big) \\ &= \frac{1}{4}\big((n+1)^4 - 1 - n - 2n(n+1) - n(n+1)(2n+1)\big) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)\big((n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 1 - 2n - n(2n+1)\big) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)(n^3 + n^2) \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{S_3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}.}$

5. **Calcul de S_4 :**

En appliquant la relation pour $p = 4$ on trouve :

$$\begin{aligned}
S_4 &= \frac{1}{5}\big((n+1)^5 - 1 - S_0 - 5S_1 - 10S_2 - 10S_3\big) \\
&= \frac{1}{5}\left((n+1)^5 - 1 - n - \frac{5}{2}n(n+1) - \frac{5}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n^2(n+1)^2\right) \\
&\vdots \quad \textit{(calculs)} \\
&= \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.
\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{S_4 = \dfrac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.}$

Solutions des exercices du chapitre 3

Solution de l'exercice 3.1

Le produit de matrices XY est défini seulement lorsque le nombre de colonnes de la matrice X est égal au nombre de lignes de la matrice Y. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \\
AB &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 15 \end{pmatrix} \\
BA & \quad \text{non défini} \\
AE &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \\
BD &= \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CD &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\
A(BC)D &= (AB)(CD) \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 70 \\ 142 \end{pmatrix} \\
A(B(DB)) & \quad \text{non défini car } DB \text{ n'est pas défini} \\
A(B+2E) & \quad \text{non défini car } B+2E \text{ n'est pas défini}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3.3

Le calcul donne :

$$\begin{aligned}
U(s)U(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ -s & 1 & -\frac{s^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ -t & 1 & -\frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & s+t \\ -s-t & 1 & -st-\frac{s^2}{2}-\frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= U(s+t),
\end{aligned}$$

puisque :

$$-st - \frac{s^2}{2} - \frac{t^2}{2} = -\frac{1}{2}(s^2+t^2+2st) = -\frac{(s+t)^2}{2}.$$

Solution de l'exercice 3.5

Si $t, t' \in]-1,1[$ alors $tt' \in]-1,1[$, donc $1+tt' > 0$ n'est pas nul. Si on prend $\boxed{s = \frac{t+t'}{1+tt'}}$ on a :

$$s+1 = \frac{t+t'}{1+tt'} + 1 = \frac{(1+t)(1+t)}{1+tt'} > 0,$$

et :

$$s-1 = \frac{t+t'}{1+tt'} - 1 = -\frac{(1-t)(1-t)}{1+tt'} < 0,$$

donc $-1 < s < 1$. $\boxed{\text{Le calcul}}$ montre alors que : $U(t)U(t') = U(s)$.

Solution de l'exercice 3.7

1. **Calcul de B_4 et A_4B_4 :**

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A_4B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Calcul de B_n et A_nB_n :**

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A_nB_n = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \dots & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 3 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 3.8

Si on écrit

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

La relation $BX = XB$ se traduit par le système :

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2c & = 0 \\ -2a - 2b + 2d & = 0 \\ 2c & = 0 \\ 0 & = 2c \end{array} \right.$$

D'où :

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} a & a+d \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ avec } a, d \in \mathbb{K}.}$$

Solution de l'exercice 3.10

1. **Calcul de $AB - BA$:**
   On trouve $AB - BA = 0$ *i.e.* A et B commutent.
2. **Calcul de $PQ - QP$:**
   On trouve $PQ - QP = 0$, car si A et B commutent, tout polynôme en A commute avec tout polynôme en B.

Solution de l'exercice 3.12

1. **La matrice $I - A$ est un idempotent :**
   En effet, si $A^2 = A$ on a :

$$\begin{array}{rcll} (I-A)^2 & = & (I-A)(I-A) & \\ & = & I^2 - 2A + A^2 & \\ & = & I - 2A + A & \text{car } A^2 = A \\ & = & I - A & \end{array}$$

   Et réciproquement, si $I - A$ est idempotente, d'après le calcul précédent, c'est aussi le cas de $I - (I - A) = A$.

2. **AB est idempotente :**
   En effet on a :
$$\begin{aligned}(AB)^2 &= A^2B^2 \text{ car } AB = BA\\ &= AB \text{ car } A^2 = A \text{ et } B^2 = B\end{aligned}$$

3. **Si $AB = A$ et $BA = B$ alors A et B sont idempotentes :**
   En effet
$$\begin{aligned}A^2 &= (AB)^2 \text{ car } A = AB\\ &= A(BA)B\\ &= (AB)B \text{ car } BA = B\\ &= AB \text{ car } AB = A\\ &= A \text{ car } AB = A\end{aligned}$$
   Et on montre de même $B^2 = B$ en permutant A et B dans le calcul précédent.

4. **Condition nécessaire et suffisante pour qu'une somme d'idempotents le soit aussi : :**
   Si A et B sont des idempotents, on a :
$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B)\\ &= A^2 + AB + BA + B^2\\ &= A + B + AB + BA \qquad \text{car } A^2 = A \text{ et } B^2 = B\end{aligned}$$
   Ainsi on aura $(A+B)^2 = A + B$ si et seulement si $AB + BA = 0$
   Il est clair que $AB = BA = 0$ entraîne $AB + BA = 0$. Réciproquement, si $AB + BA = 0$ alors :
$$\begin{aligned}AB &= A^2B \text{ car } A = A^2\\ &= A(AB)\\ &= -(AB)A \text{ car } AB = -BA\\ &= -(-BA)A \text{ car } AB = -BA\\ &= BA^2\\ &= BA \text{ car } A = A^2\end{aligned}$$
   Ainsi $AB = BA = -BA$ donc $AB = BA = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.13

1. Par le calcul on obtient que : $\boxed{A^2 = A.}$
2. $zA + tI = 0 \Leftrightarrow z = t = 0$ **:**
   En effet le coefficient de la troisième ligne et de la première colonne de $zA + tI = 0$ vaut z et celui de la deuxième ligne et de la deuxième colonne vaut $t + z$. Si $zA + tI = 0$ on a donc forcément $z = t + z = 0$, d'où $t = z = 0$, et la réciproque est évidente.

3. On a donc :

$$\begin{aligned}
(xI+yA)^2 = I &\Leftrightarrow x^2I + 2xyA + y^2A^2 = I, \text{ d'après la formule du binôme } (A \text{ at } I \text{ commutent})\\
&\Leftrightarrow (x^2-1)I + y(2x+y)A = 0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ y(2x+y)=0 \end{cases} \quad \text{d'après la question 2}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ou } x=-1 \\ y=0 \text{ ou } 2x+y=0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \boxed{(x,y) \in \{(1,0);(1,-2);(-1,0);(-1,2)\}}
\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.14

1. **Résolution de** $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **:**

La matrice X doit être une matrice 2×2 : $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. L'équation est équivalente à :

$$\begin{cases} a^2+a+bc &= 1 \\ d^2+d+bc &= 1 \\ (a+d+1)c &= 1 \\ (a+d+1)b &= 1 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} b &= c \\ b, a+d+1 &\neq 0 \\ a+d+1 &= \frac{1}{b} \\ a^2-d^2+a-d &= 0 \\ a^2+a+b^2=1 \end{cases}$$

Comme $a^2-d^2+a-d = (a+d+1)(a-d)$ c'est encore :

$$\begin{cases} b &= c \\ a &= d \\ b, a+d+1 &\neq 0 \\ 2a+1 &= \frac{1}{b} \\ a^2+a+b^2=1 \end{cases},$$

i.e.

$$\begin{cases} b &= c \\ a &= d \\ b, a+d+1 &\neq 0 \\ 2a+1 &= \frac{1}{b} \\ a^2+a+\frac{1}{(2a+1)^2}=1 \end{cases}$$

La dernière équation est équivalente à : $-4a^4 - 8a^3 - a^2 + 3a = 0$
soit : $a(a+1)(-4a^2-4a+3) = 0$.
Elle admet quatre solutions : $a=0$ ou $a=-1$ ou $a=\frac{1}{2}$ ou $a=-\frac{3}{2}$, qui donnent quatre matrices solutions :

$$\boxed{X \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}. \right\}}$$

Solution du problème 3.17

1. **Calcul de $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]$:**
   D'après la définition du commutateur on a :

$$\begin{aligned}
& [A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]] \\
= \;& [A,BC-CB]+[B,CA-AC]+[C,AB-BA] \text{ par définition du commutateur} \\
= \;& A(BC-CB)-(BC-CB)A+B(CA-AC)-(CA-AC)B+C(AB-BA)-(AB-BA)C \\
& \text{ par définition du commutateur} \\
= \;& ABC-ACB-BCA+CBA+BCA-BAC-CAB+ACB+CAB-CBA-ABC+BAC \\
& \text{ d'après la bilinéarité du produit de matrices} \\
= \;& 0 \text{ car les termes s'annulent deux à deux}
\end{aligned}$$

2. **Calcul de $[\varphi(x,y,z),\varphi(a,b,c)]$:**

$$\begin{aligned}
[\varphi(x,y,z),\varphi(a,b,c)] &= \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -cz-by & ay & az \\ bx & -cz-ax & bz \\ cx & cy & -by-ax \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -cz-by & bx & cx \\ ay & -cz-ax & cy \\ az & bz & -by-ax \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & ay-bx & az-cx \\ bx-ay & 0 & bz-cy \\ cx-az & cy-bz & 0 \end{pmatrix} \\
(x,y,z)\wedge(a,b,c) &= (cy-bz, az-cx, bx-ay) \\
\varphi((x,y,z)\wedge(a,b,c)) &= \begin{pmatrix} 0 & ay-bx & az-cx \\ bx-ay & 0 & bz-cy \\ cx-az & cy-bz & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   Ainsi on constate que : $\boxed{[\varphi(x,y,z),\varphi(a,b,c)]=\varphi((x,y,z)\wedge(a,b,c)).}$

3. **Relation $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=\varphi(s,t,u)\Rightarrow(\alpha,\beta,\gamma)=(s,t,u)$:**
   On a :

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=\varphi(s,t,u)\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -u & t \\ u & 0 & -s \\ -t & s & 0 \end{pmatrix}$$

   Or $\boxed{\text{deux matrice sont égales si tous leurs coefficients sont égaux.}}$ Ici on voit que c'est possible si et seulement si $\alpha=s, \beta=t$et $\gamma=u$ *i.e.* si $(\alpha,\beta,\gamma)=(s,t,u)$.

4. **Identité de Jacobi :**
   Pour le produit vectoriel elle s'écrit, pour tout $U,V,W\in\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{U\wedge(V\wedge W)+V\wedge(W\wedge U)+W\wedge(U\wedge V)=(0,0,0).}$$

   On a montré à la question 2 que : $\varphi(U\wedge V)=[\varphi(U),\varphi(V)]$.
   Donc :

$$\boxed{\varphi(U\wedge(V\wedge W))=[\varphi(U),\varphi(V\wedge W)]=[\varphi(U),[\varphi(V),\varphi(W)]], \qquad (\mathcal{R})}$$

   et de même pour les deux autres termes du premier membre.

Par ailleurs, pour tout $U, V \in \mathbb{R}^3$ on remarque que : $\boxed{\varphi(U+V) = \varphi(U) + \varphi(V) \qquad (\mathcal{S})}$
car si $U = (a, b, c)$ et $V = (x, y, z)$ alors

$$\varphi(U+V) = \varphi(a+x, b+y, c+y) = \begin{pmatrix} 0 & -c-z & b+y \\ c+z & 0 & -a-x \\ -b-y & a+x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(U) + \varphi(V) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c-z & b+y \\ c+z & 0 & -a-x \\ -b-y & a+x & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & \varphi(U \wedge (V \wedge W) + V \wedge (W \wedge U) + W \wedge (U \wedge V)) \\ = \; & \varphi(U \wedge (V \wedge W)) + \varphi(V \wedge (W \wedge U)) + \varphi(W \wedge (U \wedge V)) \text{ d'après } (\mathcal{S}) \\ = \; & [\varphi(U), [\varphi(V), \varphi(W)]] + [\varphi(V), [\varphi(W), \varphi(U)]] + [\varphi(W), [\varphi(U), \varphi(V)]] \text{ d'après } (\mathcal{R}) \\ = \; & 0 \qquad \text{d'après la question 1} \\ = \; & \varphi(0,0,0) \qquad \text{car } \varphi(0,0,0) = 0 \text{ (!)} \end{aligned}$$

Alors d'après la question 3 on a : $U \wedge (V \wedge W) + V \wedge (W \wedge U) + W \wedge (U \wedge V) = (0, 0, 0)$.

Solution de l'exercice 3.18

Soient les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 \\ 1 & 1,1 & 1,2 & 1,3 \\ 1,5 & 1,7 & 1,9 & 2,1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 500 & 400 & 1000 \\ 1000 & 900 & 700 \\ 500 & 600 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. **Quantités à commander :**
   Les quantité C, P, P' de coton, polyamide et polyester à commander sont données par :

$$\boxed{\begin{pmatrix} C \\ P \\ P' \end{pmatrix} = NM \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.}$$

2. **L'entreprise peut-elle transformer entièrement ses stocks de fils en manteaux ? :**
   C'est le cas si et seulement s'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tels que :

$$NM \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\,000 \\ 100\,000 \\ 20\,000 \end{pmatrix}.$$

   ce qui est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} 2100a + 2390b + 2640c + 2970d &= 100\,000 \\ 1990a + 2230b + 2380c + 2710d &= 100\,000 \\ 800a + 910b + 960c + 1130d &= 20\,000 \end{cases}$$

   En échelonnant ce système on trouve $c = \dfrac{12900}{3381} \notin \mathbb{N}$. Donc si l'entreprise fabrique des manteaux avec ses stocks, il lui restera toujours du fil.

Solution de l'exercice 3.20

Par récurrence sur n.

Solution de l'exercice 3.21

1. **Puissances de J :**

$$\boxed{J^n = \begin{cases} I & \text{si } n = 0 \\ J & \text{si } n = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n = 2 \\ 0 \text{ si } n \geqslant 3 \end{cases}}$$

Pour $n \geqslant 0$ on le prouve par récurrence sur n, où à partir de $J^3 = 0$ puisqu'alors, pour $n \geqslant 3$:

$$J^n = J^3 J^{n-3} = 0 J^{n-3} = 0.$$

2. **Puissances de Q :**
Par le calcul on obtient $Q^2 = 3Q$. On montre alors par récurrence que $n \geqslant 1$ que : $Q^n = 3^{n-1}Q$. D'où finalement :

$$\boxed{Q^n = \begin{cases} I & \text{si } n = 0 \\ 3^{n-1}Q & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}}$$

3. **Puissances de P :**
Par le calcul on trouve $P^3 = I$, donc la suite des puissance de P est périodique, soit, plus précisément :

$$\boxed{P^n = \begin{cases} I & \text{si } n = 3k \\ P & \text{si } n = 3k+1 \\ P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}}$$

Et on montre cette relation par récurrence sur $k \geqslant 0$ ou sur $n \geqslant 0$.

Solution du problème 3.24

1. **Relation $N^2 = -2N + 3I$:**
Le calcul donne

$$N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = -2N + 3I.$$

2. **Suites (u_n) et (v_n) :**
Montrons par récurrence sur $n \geqslant 0$ la relation :

$$\exists u_n,\ v_n \in \mathbb{R},\ N^{n+1} = u_n N + v_n I.$$

– *La propriété est vraie pour $n = 0$:*
En effet on a $N^{0+1} = 1N + 0I$; il suffit donc de prendre $\boxed{u_0 = 1 \text{ et } v_0 = 0.}$

– *Si la propriété est vraie pour n, alors elle est vraie pour $n+1$:*
En effet, on a :

$$N^{n+2} = NN^{n+1} = N(u_nN+v_nI) = u_nN^2+v_nN = u_n(-2N+3I)+v_nN = (-2u_n+v_n)N+3u_nI.$$

Il suffit donc de prendre $\boxed{u_{n+1} = -2u_n + v_n \text{ et } v_{n+1} = 3u_n.}$

Ainsi les suites (u_n) et (v_n) définies par les relations encadrés ci-avant répondent au problème posé.

3. **Relation $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$:**
Il suffit d'additionner les deux relations précédentes entre u_{n+1}, v_{n+1} et u_n, v_n :

$$u_{n+1} + v_{n+1} = (-2u_n + v_n) + 3u_n = u_n + v_n.$$

4. **Relation $u_{n+1} = -3u_n + 1$:**
En effet, comme la suite $u_n + v_n$ est constante, on a :

$$u_{n+1} + v_{n+1} = u_0 + v_0 = 0 + 1 = 1.$$

Comme, de plus $v_{n+1} = 3u_n$, on déduit $u_{n+1} + 3u_n = 1$.

5. **Calcul de u_n et v_n :**
D'après la relation $u_{n+1} + 3u_n = 1$, (u_n) est une suite arithmético-géométrique, on applique la méthode du cours :
– L'équation $l = -3l + 1$ a pour solution $l = \frac{1}{4}$.
– La suite $(u_n - l)$ est géométrique : $u_{n+1} - \frac{1}{4} = -3(u_n - \frac{1}{4})$
– D'où $u_n = \frac{1}{4} + (-3)^n(u_0 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(-3)^n$.
On déduit alors v_n de $u_n + v_n = u_0 + v_0 = 1$. Ainsi $\boxed{u_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(-3)^n \text{ et } v_n = \frac{3}{4} + -\frac{3}{4}(-3)^n.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.26

1. **Existence de la suite (u_n) :**
Recherche du résultat :
Si une telle suite (u_n) existe, on aura forcément, d'une part :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix},$$

d'où

$$u_0 = 0, u_1 = u_2 = 1.$$

Et d'autre part, pour tout n :

$$\begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_{n+2} \end{pmatrix} = A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n & u_{n-1} + u_n \\ u_{n+1} & u_n + u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

d'où $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$. Ceci détermine entièrement la suite (u_n)
Rédaction de la réponse :
$\boxed{\text{Soit la suite } (u_n) \text{ définie par récurrence par :}}$

$$\boxed{\begin{cases} & u_0 = 0, u_1 = 1, \\ \forall n \geqslant 0, & u_{n+2} = u_n + u_{n+1}. \end{cases}}$$

Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la relation :

$$A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

– La relation est vraie pour $n = 1$ car, par définition de u_n, on a :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \text{ et } u_2 = u_0 + u_1 = 0 + 1 = 1,$$

d'où :

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix}.$$

– Si la relation est vraie à l'ordre n, on a :

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n & u_{n-1} + u_n \\ u_{n+1} & u_n + u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_{n+2} \end{pmatrix},$$

d'après la relation de récurrence qui définit (u_n). Ainsi la relation est vraie à l'ordre $n + 1$.

2. **Calcul de u_n et A^n en fonction de n :**
La suite (u_n) vérifie une relation de récurrence linaire d'ordre 2 — c'est la suite de Fibonacci. On peut donc calculer u_n par la méthode donnée en cours. Après calculs on obtient :

$$\boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

D'après la question précédente on déduit :

$$\boxed{A^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \end{pmatrix}}$$

3. **Expression de u_{2n} en fonction de u_{n-1}, u_n et u_{n+1} :**
On a :

$$\begin{aligned} A^{2n} &= \begin{pmatrix} u_{2n-1} & u_{2n} \\ u_{2n} & u_{2n+1} \end{pmatrix} \\ (A^n)^2 &= \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n-1}^2 + u_n^2 & u_n(u_{n-1} + u_{n+1}) \\ u_n(u_{n-1} + u_{n+1}) & u_n^2 + u_{n+1}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi, pour tout n, la relation :

$$\boxed{u_{2n} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1}).}$$

4. **Calcul de u_{30} :**
Une méthode brutale consiste à calculer tous les termes de la suite de $n = 0$ à $n = 30$ à l'aide de la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$; ça marche mais c'est un peu long, surtout dans le cadre d'un devoir en temps limité. Il faut donc réfléchir un peu plus et essayer d'utiliser l'indication sur u_{15}.

En particulier on doit penser au résultat de la question précédente. On a :

$$\begin{aligned}
u_0 &= 0\\
u_1 &= 1\\
u_2 &= u_1 + u_0 = 1\\
u_3 &= u_2 + u_1 = 2\\
u_4 &= u_3 + u_2 = 3\\
u_5 &= u_4 + u_3 = 5\\
u_6 &= u_5 + u_4 = 8\\
u_7 &= u_6 + u_5 = 13\\
u_8 &= u_7 + u_6 = 21\\
u_9 &= u_8 + u_7 = 34\\
u_{14} &= u_7(u_6 + u_8) = 13(8 + 21) = 377\\
u_{15} &= 610 \text{ (donné)}\\
u_{16} &= u_8(u_7 + u_9) = 21(34 + 13) = 987\\
u_{30} &= u_{15}(u_{14} + u_{16}) = 610(377 + 987) = 610 \times 1364 = 832040
\end{aligned}$$

Une quantité raisonnable de calculs donne donc $\boxed{u_{30} = 832040.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.27

1. **Expression de A^n en fonction de u_n :**

   Montrons par récurrence sur $n \geqslant 0$ la relation : $A^n = \begin{pmatrix} a^n & u_n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.

   – Pour $n = 0$, comme $u_0 = 0$ et $a^0 = b^0 = 1$ elle s'écrit : $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc elle est vraie.

   – Si elle est vraie à l'ordre n alors :

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n A\\
&= \begin{pmatrix} a^n & u_n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&= \begin{pmatrix} a^{n+1} & bu_n + a^n c \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} a^{n+1} & u_{n+1} \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix} \text{ d'après la définition de la suite } (u_n)
\end{aligned}$$

   Donc la relation est vraie à l'ordre $n + 1$.

2. **Calcul du terme général de la suite (u_n) :**

   (a) **Résolution de $x^2 - (a + b)x + ab = 0$:**

   Cette équation du second degré a pour discriminant :

$$\Delta = (a + b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

   n.b. : il est faux d'écrire que $\sqrt{\Delta} = a + b$; on a seulement $\sqrt{\Delta} = |a + b|$. Les solutions ci-dessus sont obtenues avec la formule de résolution du cours de $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ avec } \delta \text{ tel que } \delta^2 = \Delta.$$

– $\boxed{\text{si } a \neq b}$ alors il y a deux solutions réelles distinctes :

$$x = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} = a \text{ ou } x = \frac{(a+b)-(a-b)}{2} = b.$$

– $\boxed{\text{si } a = b}$ alors il y a une seule solution réelle : $x = a = b$.
En conclusion l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\begin{cases} \{a,b\} & \text{si } a \neq b \\ \{a\} & \text{si } a = b \end{cases}}$$

(b) **Calcul de $u_{n+2} - (a+b)u_{n+1} + abu_n$:**

$$\begin{aligned} u_{n+2} - (a+b)u_{n+1} + abu_n &= (bu_{n+1} + a^{n+1}c) - (a+b)u_{n+1} + abu_n \\ & \quad \text{d'après la relation de récurrence qui définit la suite } (u_n) \\ &= a^{n+1}c - au_{n+1} + abu_n \\ &= a^{n+1}c - a(bu_n + a^n c) + abu_n \\ & \quad \text{d'après la relation de récurrence qui définit la suite } (u_n) \\ &= a^{n+1}c - abu_n - aa^n c + abu_n \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

(c) **Calcul du terme général de la suite (u_n) :**
D'après la question précédente, on voit que (u_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est celle de la question (2-a). On distingue donc deux cas :

– $\boxed{\text{si } a \neq b}$ alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout n :

$$u_n = \lambda a^n + \mu b^n.$$

Comme $u_0 = 0$ et $u_1 = bu_0 + a^0 c = c$ on a :

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= u_0 = 0 \\ \lambda a + \mu b &= u_1 = c \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \frac{c}{a-b} \text{ et } \mu = -\frac{c}{a-b}.$$

– $\boxed{\text{si } a = b}$ alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout n :

$$u_n = (\lambda n + \mu)a^n.$$

Et, si $a =\neq 0$, on a :

$$\begin{cases} \mu &= u_0 = 0 \\ (\lambda + \mu)a &= u_1 = c \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \frac{c}{a} \text{ et } \mu = 0.$$

Soit $u_n = cna^{n-1}$; et si $a = 0$ on constate que cette relation reste vraie (pour $n \geqslant 1$) puisqu'alors la suite u_n est la suite nulle.

En conclusion :

$$\boxed{u_n = \begin{cases} c\dfrac{a^n - b^n}{a-b} & \text{si } a \neq b \\ cna^{n-1} & \text{si } a = b \end{cases}}$$

(d) **Expression de A^n :**

D'après les questions précédentes on déduit que :

$$\boxed{A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} a^n & c\frac{a^n-b^n}{a-b} \\ 0 & b^n \end{pmatrix} & \text{si } a \neq b \\ \begin{pmatrix} a^n & cna^{n-1} \\ 0 & b^n \end{pmatrix} & \text{si } a = b \end{cases}}$$

Solution de l'exercice 3.29

On trouve :

1. $U^2 = 2U$; $V^2 = 2V$, $UV = VU = 0$.
2. Par une récurrence évidente : $U^n = 2^{n-1}U$.
3. Par une récurrence évidente : $V^n = 2^{n-1}V$.
4. Comme U et V commutent on peut appliquer la formule du binôme ; on trouve :

$$A^n = a^nU^n + b^nV^n,$$

compte-tenu du fait que $UV = VU = 0$.

Solution de l'exercice 3.30

On remarque que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + J,$$

où J est la matrice étudiée à l'exercice 3.21. Comme $\boxed{I \text{ et } J \text{ commutent}}$ puisque I commute avec toutes les autres matrices, on peut utiliser la formule du binôme :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n &= (I+J)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k I^{n-k} J^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k J^k \\
&= \sum_{k=0}^{2} C_n^k J^k \text{ si } n \geqslant 2, \text{ car } J^k = 0 \text{ si } k \geqslant 3 \\
&= C_n^0 J^0 + C_n^1 J + C_n^2 J^2 \\
&= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{cases} I & \text{si } n = 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n = 1 \\ \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}}$$

n.b. : en fait on peut remarquer que la troisième expression (cas où $n \geqslant 2$) reste valable aussi pour $n = 0$ et $n = 1$.

Solution de l'exercice 3.31

En regardant la relation pour $n = 2$ montrer que nécessairement $bc = 0$

Distinguer alors 3 cas :

1. $b = c = 0$: $\boxed{\text{matrices diagonales}}$ elles sont solutions du problème.
2. $b \neq 0$ et $c = 0$: pour $n = 2$ la relation demandée implique que $a + d = b$ d'où $a^2 + 2ad + d^2 = b^2$. Pour $n = 4$ la relation demandée implique $a^2 + d^2 = b^2$. En comparant avec la relation trouvée juste avant on a : $ad = 0$.
   (a) Si $d = 0$ la relation pour $n = 2$ implique $ab = b^2$ soit $a = b$. On montre alors, par récurrence, que :
   $$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & a^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$
   (b) Si $a = 0$ on obtient de même les solutions suivantes :
   $$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & d^n \\ 0 & d^n \end{pmatrix}.}$$
3. $c \neq 0$ et $b = 0$: on trouve de manière analogue au cas précédent des solutions du type
   $$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & d \end{pmatrix} et \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}.}$$

Solution de l'exercice 3.33

Tout d'abord on remarque deux choses :

1. La relation $[[A, B], B] = 0$ signifie que $[A, B]$ et B commutent. Donc $[A, B]$ commute aussi avec tous les polynômes en B, en particulier avec les puissances de B (*i.e.* B^n).
2. Pour toute les matrices C, D de même taille que A on a ;
   $$\boxed{[A, CD] = C[A, D] + [A, C]D,}$$
   puisque :
   $$C[A, D]+[A, C]D = C(AD-DA)+(AC-CA)D = CAD-CDA+ACD-CAD = ACD-CDA = [A, CD].$$

Montrons $\boxed{\text{par récurrence}}$ sur $n \geqslant 1$ la relation : $[A, B^n] = n[A, B]B^{n-1}$.

– Pour $n = 1$ elle s'écrit $[A, B] = 1[A, B]B^0$, donc elle est vraie puisque $B^0 = I$.

– Si elle est vraie à l'ordre n alors :

$$\begin{aligned}
[A, B^{n+1}] &= [A, B^n B] \\
&= B^n[A, B] + [A, B^n]B \text{ d'après la remarque 2} \\
&= [A, B]B^n + [A, B^n]B \text{ d'après la remarque 1} \\
&= [A, B]B^n + n[A, B]B^{n-1}B \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= [A, B](B^n + nB^n) \text{ en factorisant} \\
&= (n + 1)[A, B]B^n
\end{aligned}$$

Donc la relation est vraie à l'ordre $n + 1$.

Variante : sans la remarque préliminaire 2, dans le passage de l'ordre n à l'ordre $n + 1$ la relation :

$$[A, B^{n+1}] = B^n[A, B] + [A, B^n]B$$

s'obtient directement par :

$$\begin{aligned}
[A, B^{n+1}] &= AB^{n+1} - B^{n+1}A \\
&= (AB^n)B - B^n(BA) \\
&= ([A, B^n] + B^nA)\,B - B^n\,(-[A, B] + AB) \\
&= [A, B^n]B + B^nAB + B^n[A, B] - B^nAB \\
&= B^n[A, B] + [A, B^n]B
\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.37

Le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a une infinité de solutions, donc A n'est pas inversible.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.38

Pour A et B, d'après le critère d'inversibilité de la proposition 3.3.12, B n'est pas inversible et A est inversible d'inverse :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Pour les autres matrices on utilise la méthode du théorème 3.3.14. La résolution des systèmes linéaire indique que C et D ne sont pas inversibles et que F est inversible d'inverse :

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.43

1. **Résolution du système :**

   On échelonne le système par la $\boxed{\text{méthode de Gauss :}}$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x & -2y & -(2+m)z & = 0 \qquad L_3 \\ & (-3-m)y & -(2m+6)z & = 0 \qquad L_2 + 2L_3 \\ & -(2m+6)y & +(1-(m+2)^2)z & = 0 \qquad L_1 + (m+2)L_3 \end{array} \right.$$

Or :

$$1-(m+2)^2=(1-(m+2))(1+(m+2))=-(m+1)(m+3).$$

On constate donc que les coefficients des deux dernière lignes ont tous $m+3$ en facteur. $\boxed{\text{Quand } m \neq -3}$ on peut donc $\boxed{\text{simplifier :}}$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & -2y & -(2+m)z & =0 & L_3 \\ & -y & -2z & =0 & L_2' \\ & -2y & -(m+1)z & =0 & L_1' \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & -2y & -(2+m)z & =0 & L_3 \\ & -y & -2z & =0 & L_2' \\ & & -(m-3)z & =0 & L_1'-2L_2' \end{array}\right.$$

Le système est échelonné. Si $m \neq 3$ on trouve une seule solution $x=y=z=0$. Si $m=3$ le système obtenu à la fin donne :

$$y=-2z \text{ et } x=2y+5z=z.$$

Il reste enfin à traiter le cas $m=-3$ exclu au début ; le système obtenu avant la simplification par $m+3$ s'écrit alors :

$$x-2y+z=0.$$

<u>Conclusion</u>

- si $m \notin \{3,-3\}$ le système a une seule solution $(x,y,z)=(0,0,0)$.
- si $m=3$ l'ensemble des solutions est : $\{(z,-2z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$
- si $m=-3$ l'ensemble des solutions est : $\{(2y-z,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$

2. **Inversibilité de la matrice :**

   La matrice M est la matrice du système (S) *i.e.* : $(S) \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Or, pour qu'une matrice carrée de taille n soit inversible il faut et il suffit qu'elle soit de rang n. On a vu lors de la résolution précédente que (S) (et donc M) est de rang 3 si $m \notin \{3,-3\}$, de rang 2 si $m=3$ et de rang 1 si $m=-3$.

   Ainsi $\boxed{\text{la matrice est } M \text{ inversible si et seulement si } m \notin \{3,-3\}.}$

3. **Inverse de M :**

On obtient l'inverse en achevant la résolution du système (S) :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllcll} x & -2y & -(2+m)z & = & c & L_3 \\ & -y & -2z & = & \dfrac{b+2c}{m+3} & L_2' \\ & & -(m-3)z & = & \dfrac{a-2b+(m-2)c}{m+3} & L_1'-2L_2' \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} z & = & \dfrac{-a+2b-(m-2)c}{m^2-9} \\ y & = & -\dfrac{b+2c}{m+3}-2z \\ & = & \dfrac{-(b+2c)(m-3)-2(-a+2b-(m-2)c)}{m^2-9} \\ & = & \dfrac{2a+(-m-1)b+2c}{m^2-9} \\ x & = & c+2y+(2+m)z \\ & = & \dfrac{c(m^2-9)+2(2a+(-m-1)b+2c)+(2+m)(-a+2b-(m-2)c)}{m^2-9} \\ & = & \dfrac{a(4-(2+m))+b(2(-m-1)+2(2+m))+c(m^2-9+4-(2+m)(m-2))}{m^2-9} \\ & = & \dfrac{a(2-m)+2b-c}{m^2-9} \end{array}\right.$$

d'où :

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{m^2-9}\begin{pmatrix} 2-m & 2 & -1 \\ 2 & -m-1 & 2 \\ -1 & 2 & -m+2 \end{pmatrix}.}$$

4. **Calcul direct pour $m=-2$:**

La même méthode conduit — par des calculs plus simples — à :

$$\boxed{M^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.44

Rappelons d'abord qu'une matrice carrée d'ordre 3 est inversible si et seulement si elle est de rang 3. Il suffit donc de répondre à la seconde question pour répondre à la première.

Pour calculer le rang de A il suffit de calculer le rang du système linéaire

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où on a choisi de prendre un second membre nul pour simplifier les calculs (le rang du système ne dépend pas du second membre).

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rll} x+2y+(m+3)z & =0 & L_1 \\ 2x+3y+(m+4)z & =0 & L_2 \\ 3x+(6m+5)y+7z & =0 & L_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rll} x+2y+(m+3)z & =0 & L_1 \\ -y-(m+2)z & =0 & L_2-2L_1=L_2' \\ (6m-1)y-(3m+2)z & =0 & L_3-3L_1=L_3' \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rll} x+2y+(m+3)z & =0 & L_1 \\ -y-(m+2)z & =0 & L_2' \\ (-(6m-1)(m+2)-(3m+2))z & =0 & L_3'+(6m-1)L_2' \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rll} x+2y+(m+3)z & =0 & L_1 \\ -y-(m+2)z & =0 & L_2' \\ (-6m^2-14m)z & =0 & L_3'+(6m-1)L_2' \end{array} \right.$$

On voit donc que
- le système est de rang 3, *i.e.* la matrice est inversible, si $-6m^2-14m \neq 0$, soit $m \notin \left\{0, -\frac{7}{3}\right\}$.
- le système est de rang 2, et la matrice n'est pas inversible si $\boxed{m \in \left\{0, -\frac{7}{3}\right\}.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.45

Pour les exercices 3.2 à 3.4, comme $U(0)=I$ et $U(s)U(t)=U(s+t)$ on a :

$$U(t)U(-t)=U(-t)U(t)=I,$$

donc $U(t)$ est inversible d'inverse $U(-t)$.

Pour l'exercice 3.5 comme $U(0)=I$ et :

$$U(t)U(t')=U\left(\frac{t+t'}{1+tt'}\right),$$

on a de même :

$$U(t)U(-t)=U(-t)U(t)=I,$$

donc $U(t)$ est inversible d'inverse $U(-t)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.48

1. **Inversibilité de B :**

   On sait que si le produit de deux matrices non nulles est nul, alors aucune de ces matrices n'est inversible *i.e.* :

   $$\forall C, D \in M_n - \{0\},\ CD=0 \Rightarrow C, D \notin GL_n.$$

   Rappelons la démonstration, par l'absurde, de ce fait (déjà donnée en cours) : Si C est inversible et $CD=0$ alors $0=C^{-1}0=C^{-1}(CD)=D$, donc D est nulle.

   Montrons $\boxed{\text{par l'absurde}}$ que $\boxed{B \text{ n'est pas inversible :}}$ La relation $B^4=0$ s'écrit aussi :

   $$BB^3=0.$$

   Ainsi, pour que B soit inversible il faut que $B^3=0$. Comme $B^3=0$ s'écrit aussi

   $$BB^2=0,$$

on déduit de même que, pour que B soit inversible il faut que $B^2 = 0$, soit $BB = 0$. Et cette de dernière relation on déduit qu'il est impossible que B soit inversible.
Autre Méthode : Si B était inversible, alors toute puissance de B aussi. Or $B^4 = 0$ n'est pas inversible.

2. **$(I + B)$ est inversible :**
Le calcul donne :
$$(I + B)(I - B + B^2 - B^3) = I - B + B^2 - B^3 + B - B^2 + B^3 - B^4 = I - B^4 = I,$$
car $B^4 = 0$, soit
$$\boxed{(I + B)(I - B + B^2 - B^3) = I.}$$
On déduit donc que $\boxed{I + B \text{ est inversible d'inverse } I - B + B^2 - B^3.}$

3. **Inversibilité de $I - B$:**
En raisonnant comme à la question précédente, on remarque (en remplaçant B par $-B$) que :
$$(I - B)(I + B + B^2 + B^3) = I - B^4 = I,$$
on déduit donc que $\boxed{I - B \text{ est inversible d'inverse } I + B + B^2 + B^3.}$
Autre méthode :
$$I - B + B^2 - B^3 = (I - B) + (I - B)B^2 = (I - B)(I + B^2),$$
donc d'après la question précédente :
$$I = (I - B + B^2 - B^3)(I + B) = (I - B)(I + B^2)(I + B) = (I - B)(I + B + B^2 + B^3).$$

4. **A^{-1} et B commutent :**
En effet on sait que $AB = BA$. En multipliant à droite et à gauche par A^{-1}, on a :
$$A^{-1}(AB)A^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1}.$$
Comme :
$$A^{-1}(AB)A^{-1} = (A^{-1}A)BA^{-1} = IBA^{-1} = BA^{-1},$$
et
$$A^{-1}(BA)A^{-1} = A^{-1}B(AA^{-1}) = A^{-1}BI = A^{-1}B,$$
on obtient : $\boxed{BA^{-1} = A^{-1}B.}$

5. **Calcul de $(A^{-1}B)^4$:**
Comme A et B^{-1} commutent, on a :
$$(A^{-1}B)^4 = A^{-1}BA^{-1}BA^{-1}BA^{-1}B = (A^{-1})^4B^4 = 0,$$
car $B^4 = 0$. Ainsi :
$$\boxed{(A^{-1}B)^4 = 0.}$$

6. **Inversibilité de $A + B$:**
Pour faire le lien avec les question précédentes, on remarque que :
$$\boxed{A + B = A(I + A^{-1}B).}$$
Or à la question 2 on avait montré que si $B^4 = 0$ alors $I + B$ est inversible d'inverse $I - B + B^2 - B^3$. On a donc de même $(A^{-1}B)^4 = 0$ (question 5) qui entraîne que $I + A^{-1}B$ est inversible (d'inverse $I - A^{-1}B + (A^{-1}B)^2 - (A^{-1}B)^3$). Enfin comme A et $I + A^{-1}B$ sont inversibles, on déduit que leur produit $\boxed{A + B \text{ est inversible}}$. On peut d'ailleurs préciser l'inverse :
$$(A + B)^{-1} = (I + A^{-1}B)^{-1}A^{-1} = (I - A^{-1}B + (A^{-1}B)^2 - (A^{-1}B)^3)A^{-1}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.49

On trouve :

$$(I + A^{-1})^{-1} + (I + A)^{-1} = I.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.50

1.
2. développer la somme du premier membre...
3. On trouve : $(I + BA)^{-1} = I - B(I + AB)^{-1}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.51

Selon les cas on trouve $A^2 = I$ — alors A est inversible et $A^{-1} = A$ — ou bien $A^2 = 0$ alors A n'est pas inversible.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.54

Le calcul donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A.$$

Ainsi : $A^2 - 2A = 0$,
Soit : $A(A - 2I) = 0$. Comme $A - 2I$ n'est pas nulle on en déduit que A n'est pas inversible, d'après le corollaire 3.3.9 page 127.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.55

Pour tous les réels a et b, on calcule :

$$\begin{aligned}(A - aI)(A - bI) &= \begin{pmatrix} -a & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & -a & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & -b & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & -b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ba+2 & (-a-b+1)m & (-a-b+1)m^2 \\ \frac{-a-b+1}{m} & ba+2 & (-a-b+1)m \\ \frac{-a-b+1}{m^2} & \frac{-a-b+1}{m} & ab+2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi l'égalité $(A - aI)(A - bI) = 0$ a lieu si et seulement si

$$ab + 2 = 0 \text{ et } -a - b + 1 = 0,$$

soit encore $ab = -2$ et $a + b = 1$, c'est-à-dire que a et b sont les solutions de l'équation du second degré

$$x^2 - (1)x + (-2) = 0,$$

à savoir $\{a, b\} = \{-1, 2\}$, *i.e.* $\boxed{(a, b) = (-1, 2) \text{ ou } (a, b) = (2, -1).}$

On obtient alors

$$(A + I)(A - 2I) = 0 = (A - 2I)(A + I),$$

soit en développant le produit :

$$A^2 - A - 2I = 0 \Leftrightarrow A^2 - A = 2I \Leftrightarrow \frac{1}{2}A(A - I) = I.$$

Ainsi $\boxed{A \text{ est inversible d'inverse } A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I).}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.56

1. **Existence de α_n et β_n :**
Pour $n = 0$ on a : $M^0 = I = \alpha_0 I + \beta_0 M$ si $\boxed{\alpha_0 = 1 \text{ et } \beta_0 = 0.}$
Pour $n = 1$ on a : $M^1 = M = \alpha_1 I + \beta_1 M$ si $\boxed{\alpha_1 = 0 \text{ et } \beta_1 = 1}$.
Pour $n = 2$ on a :
$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
et
$$\alpha_2 I + \beta_2 M = \begin{pmatrix} \alpha_2 + 2\beta_2 & \beta_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 + 2\beta_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_2 & \alpha_2 + 2\beta_2 \end{pmatrix}$$
On a donc :
$$M^2 = \alpha_2 I + \beta_2 M \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = \alpha_2 + 2\beta_2 \\ 5 = \beta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{5 = \beta_2 \text{ et } \alpha_2 = -4}.$$
Plus généralement, montrons $\boxed{\text{par récurrence}}$ sur $n \geqslant 0$ la relation :
$$\exists \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R},\ M^n = \alpha_n I + \beta_n M. \qquad \mathcal{R}(n)$$
– On a montré juste avant que la relation est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$.
– Si la relation $\mathcal{R}(n)$ est vraie alors :
$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n M \\ &= (\alpha_n I + \beta_n M)M \qquad \text{d'après } \mathcal{R}(n) \\ &= \alpha_n M + \beta_n M^2 \\ &= \alpha_n M + \beta_n(-4I + 5M) \qquad \text{d'après } M^2 = \alpha_2 I + \beta_2 M \\ &= -4\beta_n I + (5\beta_n + \alpha_n)M \\ &= \alpha_{n+1} I + \beta_{n+1} M, \end{aligned}$$
à condition de prendre $\boxed{\alpha_{n+1} = -4\beta_n \text{ et } \beta_{n+1} = 5\beta_n + \alpha_n.}$

2. **Calcul de α_n et β_n :**
D'après la question précédente les suites (α_n) et (β_n) vérifient les relations de récurrence suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = -4\beta_n,\ \beta_{n+1} = 5\beta_n + \alpha_n.$$
En particulier, en remplaçant n par $n + 1$ dans la seconde relation, on a :
$$\beta_{n+2} = 5\beta_{n+1} + \alpha_{n+1} = 5\beta_{n+1} - 4\beta_n.$$
Donc la suite (β_n) vérifie une relation de $\boxed{\text{récurrence linéaire d'ordre 2}}$ dont on sait calculer le terme général connaissant $\beta_0 = 0$ et $\beta_1 = 1$. Après calculs on trouve :
$$\boxed{\beta_n = \frac{4^n - 1}{3}.}$$
D'où
$$\boxed{\alpha_n = -4\beta_{n-1} = \frac{4 - 4^n}{3}.}$$

Autre méthode :
On remarque en additionnant les deux relations de récurrence que $\beta_{n+1} + \alpha_{n+1} = \beta_n + \alpha_n$. Donc la suite $(\beta_n) + (\alpha_n)$ est constante, égale à son premier terme $\beta_0 + \alpha_0 = 1$. Ainsi, pour tout entier n, on a : $\alpha_n = 1 - \beta_n$.
En remplaçant α_n dans la relation $\beta_{n+1} = 5\beta_n + \alpha_n$, on trouve que :

$$\beta_{n+1} = 4\beta_n + 1.$$

Ainsi (β_n) est une suite arithmético-géométrique, dont on sait trouver le terme général en fonction de n...

3. **Inversibilité et inverse de M :**
On peut écrire le système linéaire associé à M et l'échelonner pour voir s'il est de Cramer, mais il est encore plus rapide de remarquer que :

$$M^2 = -4I + 5M \Leftrightarrow \frac{1}{4}(5M - M^2) = I \Leftrightarrow M\left(\frac{1}{4}(5I - M)\right) = I,$$

ce qui montre que $\boxed{M \text{ est inversible}}$ d'inverse :

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{4}(5I - M) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.}$$

SOLUTION DU PROBLÈME 3.57

1. **Calcul de $A^2, A^3, \dots, A^n$ pour $m = 1$:**
Par le calcul on voit que $A^2 = A$, d'où on déduit par récurrence sur n que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = A}$$

2. **Inversibilité de A si $m \neq 1$:**
La matrice A est inversible si et seulement si le système suivant est de Cramer :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + my + mz & = & 0 \\ (1-m)y & = & 0 \\ (1-m)z & = & 0 \end{array}\right.$$

Or pour $m \neq 1$ $\boxed{\text{le système est échelonné,}}$ donc il est de Cramer.

3. **Calcul de a et b tels que $A^2 = aA + bI$:**
On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 1-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 1-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m(2-m) & m(2-m) \\ 0 & (1-m)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-m)^2 \end{pmatrix}$$

$$aA + bI = \begin{pmatrix} a+b & am & am \\ 0 & a(1-m)+b & 0 \\ 0 & 0 & a(1-m)+b \end{pmatrix}$$

La relation $A^2 = aA + bI$ est donc possible si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \ \ L_1 \\ a(1-m)+b & = & (1-m)^2 \ \ L_2 \\ am & = & m(2-m) \ \ L_3 \end{array}\right.$$

Si $m \neq 0$ on déduit de L_3 : $a = 2 - m$, puis $b = m - 1$ de L_1 et on vérifie que cette solution vérifie L_2. Si $m = 0$ le système se réduit à une seule équation $a + b = 1$. Dans les deux cas on a au moins la solution $\boxed{(a, b) = (2 - m, m - 1).}$

4. **Expression de A^{-1} :**
La relation précédente
$$A^2 = (2 - m)A + (m - 1)I$$
s'écrit encore :
$$A(A - (2 - m)I) = A^2 - (2 - m)A = (m - 1)I.$$
Comme $m \neq 1$, on peut diviser par $m - 1$ *i.e.* :
$$A\left(\frac{1}{m-1}(A + (m-2)I)\right) = I.$$
Ceci montre que
$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{m-1}(A + (m-2)I) = \frac{1}{m-1}\begin{pmatrix} m-1 & m & m \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

5. **Calcul de J^2 :**
On calcule :
$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
soit $\boxed{J^2 = -J.}$

6. **Calcul de J^k :**
Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ la relation :
$$\boxed{J^k = \begin{cases} J & \text{si } k \text{ impair} \\ -J & \text{si } k \text{ pair} \end{cases} \qquad \mathcal{R}(k).}$$
– La relation $\mathcal{R}(1)$ est vraie, car elle signifie juste que $J^1 = J$.
– La relation $\mathcal{R}(k)$ entraîne $\mathcal{R}(k+1)$: en effet
$$J^{k+1} = J^k J = \begin{cases} JJ & \text{si } k \text{ impair} \\ -JJ & \text{si } k \text{ pair} \end{cases} = \begin{cases} -J & \text{si } k \text{ impair} \\ J & \text{si } k \text{ pair} \end{cases} = \begin{cases} -J & \text{si } k+1 \text{ pair} \\ J & \text{si } k+1 \text{ impair} \end{cases}$$
Cette formule se résume aussi à :
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ J^k = (-1)^{k+1}J.}$$

7. **Expression de A en fonction de I, J et m :**
On voit que :
$$\boxed{A = I + mJ.}$$

8. **Calcul de A^n :**

Comme I est la matrice unité, I et mJ commutent. On peut donc utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
A^n &= (I+mJ)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (mJ)^k I^{n-k} \\
&= C_n^0 I + \sum_{k=1}^{n} C_n^k m^k J^k \\
&= I + \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-m)^k (-1)^{k+1} J \\
&= I + \left(-\sum_{k=1}^{n} C_n^k (-m)^k \right) J \\
&= I + (1-(1-m)^n)J,
\end{aligned}$$

car, d'après la formule du binôme :

$$(1-m)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-m)^k.$$

Autre méthode : montrer la formule donnée par récurrence sur n. Le cas $n=0$ est évident ; le cas $n=1$ est le résultat de la question 8. Le passage de l'ordre n à l'ordre $n+1$ se fait d'après :

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n A \\
&= (I+(1-(1-m)^n)J)(I+mJ) \\
&= I+(1-(1-m)^n)J + mJ - m(1-m)^n JJ \\
&= I+(1-(1-m)^n + m + m(1-m)^n)J \\
&= I+(1-(1-m)^{n+1})J
\end{aligned}$$

SOLUTION DU PROBLÈME 3.58

1. **Inversibilité et inversion de A : :**
Le *déterminant*[8] de la matrice A vaut $2-a$. Donc A est inversible si et seulement si $a \neq 2$. Dans ce cas on sait que l'inverse de A est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{2-a} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -a & 1 \end{pmatrix}.$$

2. **Calcul de x_n : :**
C'est une suite arithmético-géométrique donc on sait que $(x_n - l)$ est géométrique de raison 2 si l est donné par $l = 2l+1$, soit $l=-1$. Donc, pour tout n, on a :

$$x_n - l = 2^{n-1}(x_1 - l);$$

soit finalement, pour tout $n \geqslant 1$: $\boxed{x_n = -1 + 2^n.}$

[8] *i.e.* $ad - bc$ pour une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

3. **Relation** $A^n = \begin{pmatrix} 1 & x_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ **pour** $a = 0$ **: :**

   Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la proposition suivante : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & x_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ $(\mathcal{P}(n))$

   – On remarque que $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque : $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   – $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$
   En effet, si $A^n = \begin{pmatrix} 1 & x_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ on a :

   $$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & x_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2x_n + 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{n+1} \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix},$$

   d'après le relation de récurrence $x_{n+1} = 2x_n + 1$.

   Inversibilité de A^n **:**
   Le déterminant vaut $2^n \neq 0$ donc A^n est inversible.

4. **Calcul de** A^n **pour** $n \in \mathbb{Z}$ **: :**
   Distinguons trois cas :

   – $n > 0$: d'après les deux questions précédentes on trouve $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 + 2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

   – $n = 0$: $A^0 = I$ par convention.

   – $n < 0$: alors $-n > 0$, et d'après la convention prise et le calcul pour $n > 0$ on trouve :

   $$\begin{aligned} A^n &= (A^{-n})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 + 2^{-n} \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2^{-n}} \begin{pmatrix} 2^{-n} & 1 - 2^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-2^{-n}}{2^{-n}} \\ 0 & \frac{1}{2^{-n}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 + 2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Ainsi, dans tous les cas on a : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 + 2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

5. **Calcul de** A^n **si** $a = 2$ **:**
   Dans ce cas : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc, comme cela a été déjà fait en d'autres occasions, on prouve, par récurrence :

   $$A^n = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution du problème 3.59

1. **Calcul de** M^0, M^1, M^2 **:**
   On sait que $\boxed{M^0 = I}$ et $\boxed{M^1 = M}$. On calcule alors :

   $$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. **Calcul de PD^0Q, PD^1Q, PD^2Q :**
On a :

$$PD^0Q = PIQ = PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

(*i.e.* P et Q sont inverses l'une de l'autre).

$$\begin{aligned} PD^1Q = PDQ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PD^2Q &= P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} Q \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -6 & 8 \end{pmatrix} \\ &= M^2 \end{aligned}$$

3. **Expression de D^n :**

Montrons $\boxed{\text{par récurrence}}$ sur $n \geqslant 1$ la relation $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

– Pour $n = 2$ la relation est vraie, d'après le calcul de D^2 effectué à la question précédente.

– Si la relation est vraie à l'ordre n alors ;

$$\begin{aligned}
D^{n+1} &= DD^n \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \times 2 & n2^{n-1} \times 2 + 2^n \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \times 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} & (n+1)2^n \\ 0 & 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

Ainsi la relation est vraie à l'ordre $n+1$

4. **Relation $M^n = PD^nQ$:**
Montrons $\boxed{\text{par récurrence}}$ sur $n \geqslant 0$ la relation $M^n = PD^nQ$.
– La relation est vrai aux ordres $n = 0, 1$ et 2 d'après les calculs des questions 1 et 2.
– Si la relation est vraie à l'ordre n on a :

$$M^{n+1} = M^nM = (PD^nQ)(PDQ),$$

où on a utilisé la relation aux ordres 1 et n. Or on a vu que $PQ = I$, donc $QP = I$ (car P et Q sont inverses l'une de l'autre) et d'après l'associativité du produit de matrices on déduit :

$$M^{n+1} = PD^n(QP)DQ = PD^nDQ = PD^{n+1}Q.$$

Ainsi la relation est vraie aussi à l'ordre $n+1$.

5. **Calcul de M^n :**
On a :

$$\begin{aligned}
M^n &= PD^nQ \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \textit{(calculs)} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2^{n-1} & (n-1)2^{n-1} & -n2^{n-1} \\ 0 & 2^{n-1} & (1-n)2^{n-1} & n2^{n-1} \\ 0 & 2^{n-1} & (1-n)2^{n-1} & n2^{n-1} \\ 0 & 2^{n-1} & (-n-1)2^{n-1} & (n+2)2^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3.61

Réponse : $\boxed{f = \sin \circ t \circ \exp \circ t.}$

Solution de l'exercice 3.68

3. **Ensemble de définition de f définie par $f(x) = \sqrt{(x^2 - x)^2 - (x^2 - x)}$:**

Le nombre $f(x)$ est défini lorsque :

$$(x^2-x)^2-(x^2-x)\geqslant 0.$$

Comme le trinôme $y^2-y=y(y-1)$ est positif pour $y\geqslant 1$ ou $y\leqslant 1$, $f(x)$ est défini pour

$$x^2-x\geqslant 1 \text{ ou } x^2-x\leqslant 0.$$

Ceci signifie encore :

$$x\in]-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right] \text{ ou } x\in[0,1].$$

Comme $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0<1<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ on en déduit que le domaine de définition de f est :

$$\boxed{\mathcal{D}f=\left]-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup[0,1]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right[.}$$

Autre manière : remarquer que $(x^2-x)^2-(x^2-x)=x(x-1)(x^2-x-1)$.

Solution de l'exercice 3.71

Ce n'est pas un polynôme car ce n'est pas défini sur $\mathbb{R}$; mais c'est la restriction d'une fonction polynomiale (faire un calcul pour simplifier l'expression de $f(x)$).

Solution du problème 3.92

1. *Stabilité de $\mathbb{H}$ par produit :*
   On calcule
   $$\begin{pmatrix}1&x&z\\0&1&y\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x'&z'\\0&1&y'\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x+x'&z+z'+xy'\\0&1&y+y'\\0&0&1\end{pmatrix}\in\mathbb{H}.$$
   On voit que le produit n'est pas commutatif.
2. *Stabilité de $\mathbb{H}$ par inverse :*
   Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ donnés cherchons $(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ tels que
   $$\begin{pmatrix}1&x&z\\0&1&y\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x'&z'\\0&1&y'\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x'&z'\\0&1&y'\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x&z\\0&1&y\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3.$$
   D'après le calcul précédent, cela signifie
   $$\begin{cases}x+x'=x'+x=0\\y+y'=y'+y=0\\z+z'+xy'=z'+z+x'y=0\end{cases}$$
   On trouve donc
   $$\begin{cases}x'=-x\\y'=-y\\z'=-xy'-z=xy-z,\end{cases}$$
   en remarquant que cette solution est compatible avec l'équation $z'+z+x'y=0$. D'où :
   $$\begin{pmatrix}1&x&z\\0&1&y\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-x&xy-z\\0&1&-y\\0&0&1\end{pmatrix}\in\mathbb{H}.$$

Solution du problème 3.93

1. **Calculs de J^2, K^2, KJ et JK :**
On trouve :

$$\boxed{J^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4J\ ;\ K^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2K; JK = KJ = 0}$$

2. **La somme de deux matrices de $\mathcal{E}$ est une matrice de $\mathcal{E}$:**
On prend deux matrices quelconques de $\mathcal{E}$: $M_{a,b}$ et $M_{c,d}$ (il n'y a pas de raison que $a = c$ et $b = d$; a et b sont des variables muettes !) et on fait la somme :

$$\begin{aligned} M_{a,b} + M_{c,d} &= \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+d & c & c-d & c \\ c & c+d & c & c-d \\ c-d & c & c+d & c \\ c & c-d & c & c+d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+b+c+d & a+c & a-b+c-d & a+c \\ a+c & a+b+c+d & a+c & a-b+c-d \\ a-b+c-d & a+c & a+b+c+d & a+c \\ a+c & a-b+c-d & a+c & a+b+c+d \end{pmatrix} \\ &= M_{a+c,b+d} \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

3. **Le produit d'une matrice de $\mathcal{E}$ par un scalaire est une matrice de $\mathcal{E}$:**
De même :

$$\lambda M_{a,b} = \lambda \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a+\lambda b & \lambda a & \lambda a-\lambda b & \lambda a \\ \lambda a & \lambda a+\lambda b & \lambda a & \lambda a-\lambda b \\ \lambda a-\lambda b & \lambda a & \lambda a+\lambda b & \lambda a \\ \lambda a & \lambda a-\lambda b & \lambda a & \lambda a+\lambda b \end{pmatrix} = M_{\lambda a,\lambda b} \in \mathcal{E}.$$

4. **Le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ est une matrice de $\mathcal{E}$:**
Il faut calculer $M_{a,b}M_{c,d}$ et montrer que c'est de la forme $M_{e,f}$ avec e, f qui dépendent de a, b, c, d. Pour simplifier le calcul on remarque que :

$$\boxed{M_{a,b} = aJ + bK.}$$

On calcule alors

$$M_{a,b}M_{c,d} = (aJ + bK)(cJ + dK) = acJ^2 + adJK + bcKJ + bdK^2 = (4ac)J + (2bd)K = M_{4ac,2bd},$$

d'après les calculs de la première question. Ainsi

$$\boxed{M_{a,b}M_{c,d} = M_{4ac,2bd} \in \mathcal{E}.}$$

5. **Existence de L :**
Remarquons d'abord que la matrice I ne convient pas, bien qu'elle vérifie la relation :

$$IM_{a,b} = M_{a,b}I = M_{a,b}.$$

En effet I n'est pas élément de $\mathcal{E}$, car sinon il existerait $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$I = M_{\alpha,\beta}.$$

Or cette dernière relation est équivalente à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta & = & 1 \\ \alpha & = & 0 \\ \alpha-\beta & = & 0, \end{array}\right.$$

ce qui est impossible (*i.e.* le système n'a pas de solution).
Par contre d'après le résultat de la question précédente, on remarque que, pour tout a, b :

$$M_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}} M_{a,b} = M_{a,b} = M_{a,b} M_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}.$$

On peut donc prendre $\boxed{L = M_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}.}$

6. **Existence des suites (α_n) et (β_n) :**
La formule de calcul d'un produit trouvée à la question 4, suggère de montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ la relation :

$$\boxed{(M_{a,b})^n = (4a)^{n-1} aJ + (2b)^{n-1} bK.}$$

– La relation est vrai pour $n = 1$, car elle s'écrit alors :

$$M_{a,b}^1 = aJ + bK.$$

– Si la relation est vraie à l'ordre n alors on a :

$$\begin{array}{rcl} M_{a,b}^{n+1} & = & M_{a,b}^n M_{a,b} \\ & = & M_{(4a)^{n-1}a,(2b)^{n-1}b} M_{a,b} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ & = & M_{4(4a)^{n-1}aa,2(2b)^{n-1}bb} \text{ d'après la relation } M_{a,b}M_{c,d} = M_{4ac,2bd} \\ & = & M_{(4a)^n a,(2b)^n b} \\ & = & (4a)^n aJ + (2b)^n bK \end{array}$$

Ainsi la relation est vraie à l'ordre $n+1$.
Ainsi il suffit de prendre $\boxed{\alpha_n = (4a)^{n-1} a \text{ et } \beta_n = (2b)^{n-1} b}$; on a bien affaire à deux suites géométriques — de raisons 4a et 2b.

7. **Rang du système linéaire :**
Pour éviter de manipuler des fractions, éventuellement compliquées, en a et b dont les dénominateurs pourraient s'annuler on transforme le système en effectuant les opérations sur les lignes et les colonnes suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ccccll} (a+b)x+ & ay+ & (a-b)z+ & at & =0 & L_1 \\ ax+ & (a+b)y+ & az+ & (a-b)t & =0 & L_2 \\ (a-b)x+ & ay+ & (a+b)z+ & at & =0 & L_3 \\ ax+ & (a-b)y+ & az+ & (a+b)t & =0 & L_4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llllll} 2ax & +2ay & +2az & +2at & =0 & L_1+L_3 = L_1' \\ 2bx & & -2bz & & =0 & L_1-L_3 = L_3' \\ 2ax & +2ay & +2az & +2at & =0 & L_2+L_4 = L_2' \\ & 2by & & -2bt & =0 & L_2-L_4 = L_4' \end{array}\right.$$

L'équivalence entre ces deux systèmes nécessite une explication ; on a en effet clairement l'implication :

$$\left\{\begin{array}{l} L_1 \\ L_3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} L_1+L_3 \\ L_1-L_3 \end{array}\right.$$

Mais la réciproque est vraie aussi car :

$$\left\{\begin{array}{l} L_1+L_3 \\ L_1-L_3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}((L_1+L_3)+(L_1-L_3))=L_1 \\ \frac{1}{2}((L_1+L_3)-(L_1-L_3))=L_3 \end{array}\right. .$$

De même on a l'équivalence :

$$\left\{\begin{array}{l} L_2 \\ L_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} L_2+L_4 \\ L_2-L_4 \end{array}\right.$$

Le système étudié est donc équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 2ax & +2ay & +2az & +2at & =0 & L_1+L_3=L'_1 \\ 2bx & & -2bz & & =0 & L_1-L_3=L'_3 \\ & 2by & & -2bt & =0 & L_2-L_4=L'_4 \end{array}\right.$$

On peut simplifier en divisant par a et b ; il faut alors distinguer plusieurs cas :

(a) Si $b=0$ et $a=0$
Le système se réduit à : $0=0$.
Il est donc de $\boxed{\text{rang } 0.}$

(b) Si $b=0$ et $a\neq 0$
Le système se réduit à une seule équation : $x+y+z+t=0$.
Il est donc $\boxed{\text{de rang } 1.}$

(c) Si $b\neq 0$ et $a=0$
Le système se réduit à :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & & -z & & =0 & \frac{1}{2b}L'_3 \\ & y & & -t & =0 & \frac{1}{2b}L'_4 \end{array}\right.$$

Il est donc de $\boxed{\text{rang } 2.}$

(d) Si $b\neq 0$ et $a\neq 0$
Le système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & +z & +y & +t & =0 & \frac{1}{2a}L'_1=L''_1 \\ x & -z & & & =0 & \frac{1}{b}L'_3=L''_2 \\ & & y & -t & =0 & \frac{1}{b}L'_4=L''_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llllll} x & +y & +z & +t & =0 & L''_1 \\ & 2z & +y & +t & =0 & L''_1-L''_2 \\ & & y & -t & =0 & L''_3 \end{array}\right.$$

il et donc $\boxed{\text{de rang } 3.}$

Solution du problème 3.94

4. Pour toute matrice A : $A=\frac{1}{2}(A+^t A)+\frac{1}{2}(A-^t A)$.
5. C'est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & -b & b \\ b & 0 & -b \\ -b & b & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } b\in\mathbb{R}.$$

6. C'est de la forme :
$$\begin{pmatrix} c & -c & 0 \\ -c & 0 & c \\ 0 & c & -c \end{pmatrix}.$$
7. Utiliser les résultats précédents

SOLUTION DU PROBLÈME 3.95

1. **Stabilité de E par composition :**
   Pour tout x réel on calcule :
$$\begin{aligned}(f_{a,b} \circ f_{\alpha,\beta})(x) &= f_{a,b}\left(f_{\alpha,\beta}(x)\right) \\ &= f_{a,b}\left(\alpha x + \beta\right) \\ &= a\left(\alpha x + \beta\right) + b \\ &= a\alpha x + (a\beta + b) \\ &= f_{a\alpha, a\beta+b}(x)\end{aligned}$$
   Comme ceci est vrai pour tout x on déduit que :
$$\boxed{f_{a,b} \circ f_{\alpha,\beta} = f_{a\alpha,a\beta+b}.}$$
   Ainsi la composée de deux éléments $f_{a,b}, f_{\alpha,\beta}$ quelconques de E est bien un élément de E ; c'est $f_{c,d}$ avec $c = a\alpha$ et $d = a\beta + b$.
2. **Résolution de l'équation $f_{a,b} \circ f_{a,b} \circ f_{a,b} = f_{a,1}$:**
   Cette équation s'écrit :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{a,b}(f_{a,b}(f_{a,b}(x))) = f_{a,1}(x),$$
   soit :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ a(a(ax + b) + b) + b = ax + 1,$$
   soit :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ a^3x + a^2b + ab + b = ax + 1.$$
   On a écrit l'égalité de deux polynômes (pour tout réel x). Cela se produit si et seulement si leurs coefficients sont égaux[9] L'équation étudiée est donc équivalente à :
$$a^3 = a \text{ et } a^2b + ab + b = 1.$$
   Or l'équation $a^3 = a$ s'écrit aussi $a(a^2 - 1) = 0$, soit $a = 0$ ou $a^2 - 1 = 0$, soit $a \in \{0, 1, -1\}$. L'équation de départ est donc équivalente à :
$$\begin{cases} a = 1 \text{ et } 3b = 1 \\ a = -1 \text{ et } b = 1 \\ a = 0 \text{ et } b = 1 \end{cases}$$
   Il y a donc trois solutions pour le couple (a, b) :
$$\boxed{\left\{ (1, \frac{1}{3}), (-1, 1), (0, 1) \right\}.}$$

[9]Sans utiliser ce théorème important on peut remarquer directement que la relation
$$\forall x \in \mathbb{R},\ ax + b = cx + d$$
entraîne $a = c$ et $b = d$. Il suffit de l'écrire pour $x = 0$ ($b = d$) puis pour $a = 1$ ($a + b = c + d$, d'où $a = c$ en simplifiant de part et d'autre par $b = d$).

3. **Existence d'un inverse g pour la composition :**
Remarquons que $f_{1,0} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Si g est élément de E alors il existe α, β tels que $g = f_{\alpha,\beta}$. La relation :
$$f_{a,b} \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}},$$
s'écrit alors :
$$f_{a,b} \circ f_{\alpha,\beta} = f_{1,0}.$$
Or d'après le calcul fait à la question 1, il suffit pour cela que :
$$a\alpha = 1 \text{ et } a\beta + b = 0,$$
soit, puisqu'on a pris $a \neq 0$:
$$\alpha = \frac{1}{a} \text{ et } \beta = -\frac{b}{a}.$$
Ainsi $\boxed{g = f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}}$ vérifie $f_{a,b} \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. En utilisant la même formule de calcul de la question 1 on a alors (en permutant a et α et b et β) :
$$f_{\alpha,\beta} \circ f_{a,b} = f_{\alpha a, \alpha b+\beta} = f_{1,0} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}},$$
puisque
$$\alpha a = 1 \text{ et } \alpha b + \beta = \frac{1}{a}b - \frac{b}{a} = 0.$$
4. **Commutativité de la composition dans E :**
La composition $\boxed{\text{n'est pas commutative,}}$ contrairement à ce que suggère le cas particulier précédent. Cela se voit sur le contre-exemple suivant :
$$f_{1,1} \circ f_{2,0} = f_{2,1} \text{ et } f_{2,0} \circ f_{1,1} = f_{2,2},$$
on a donc $\boxed{f_{1,1} \circ f_{2,0} \neq f_{2,0} \circ f_{1,1}.}$
Relation $(f \circ g) \circ (h \circ i) = (f \circ (g \circ h)) \circ i$:
Cette relation est vraie pour n'importe quelles fonctions, qu'elles soient dans E ou pas ; elle provient de l'associativité de la composition.
5. **Linéarité de f :**
On a :
$$\begin{aligned} f_{a,b}(x+y) - f_{a,b}(x) - f_{a,b}(y) &= a(x+y) + b - (ax+b) - (ay+b) \\ &= -b \end{aligned}$$
On a donc l'égalité annoncée $\boxed{\text{si et seulement si } b = 0.}$
6. **Simplification de $f_{a,b} \circ f_{\alpha,\beta} = f_{\alpha,\beta}$:**
Cette relation s'écrit :
$$\alpha a = \alpha \text{ et } a\beta + b = \beta,$$
soit
$$\alpha(a-1) = 0 \text{ et } (a-1)\beta = -b,$$
la première relation signifie $\alpha = 0$ ou $a = 1$; la relation s'écrit donc :
$$(a = 1 \text{ et } b = 0) \text{ ou } (\alpha = 0 \text{ et } (a-1)\beta = -b.$$
Le premier cas $a = 1$ et $b = 0$ signifie que $f_{a,b} = f_{1,0} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, mais il y a une autre possibilité, par exemple :
$$\boxed{f_{2,1} \circ f_{0,-1} = f_{0,-1}.}$$
La relation proposée n'est donc pas automatique, pour $\alpha = 0$ notamment.

Solutions des exercices du chapitre 4

Solution de l'exercice 4.1

1. $\frac{-2}{1-i\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$.
3. $\overline{-2+3i} = -2-3i$.
4. $\frac{5+2i}{1-2i} = \frac{1}{5} + i\frac{12}{5}$.
5. $\frac{1+2i}{1-2i} = -\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$.
6. $\frac{1}{(1+2i)(3-i)} = \frac{1}{10} - \frac{i}{10}$.
7. $\frac{3+6i}{4-2i} = i\frac{3}{2}$.
8. $\frac{3+6i}{3-4i} = -\frac{3}{5} + i\frac{6}{5}$.
9. $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} = -3$
10. $\frac{1}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4}$
11. $\frac{3+2i}{3-2i} = \frac{5}{13} + i\frac{12}{13}$.
12.
13.
14.
15. $\left(\frac{1+i+3(1-i)}{1+i}\right)^3 = -26+18i$
16. $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9 = (-i)^9 = -i$
17. $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} - 1\right)^{11} = 0$

Solution de l'exercice 4.2

1. $\dfrac{1+ri}{2r+(r^2-1)i} = \dfrac{r}{r^2+1} + i\dfrac{1}{r^2+1}$.
2. (a) $z^3 = (x^3-3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ (utiliser la formule du binôme).
   (b) $\dfrac{1-i}{z} = \dfrac{x-y}{x^2+y^2} - i\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.
   (c) $\dfrac{z^2}{z+i} = \dfrac{x^3+xy^2+2xy}{x^2+(y+1)^2} + i\dfrac{yx^2-x^2+y^3+y^2}{x^2+(y+1)^2}$
3. En utilisant : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} i^k = \frac{1-i^{n+1}}{1-i}$
   ou en raisonnant par récurrence, on a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 4p \\ 1+i & \text{si } n = 4p+1 \\ i & \text{si } n = 4p+2 \\ 0 & \text{si } n = 4p+3 \end{cases}}$$

Solution de l'exercice 4.3

1. Pas de solution.
2. Système de Cramer de solution $\boxed{(z,t) = (3-i, 1-2i).}$
3.

$$\begin{cases} iz & +(1+i)t & = & 1 & L_1 \\ -z & +it & = & 2-i & L_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -z & +it & = & 2-i & L_2 \\ & it & = & 2i+2 & L1+iL_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t & = & 2-2i \\ z & = & it-2+i = 3i \end{cases}$$

Solution de l'exercice 4.4

La deuxième équation n'est définie que lorsque $\boxed{z \neq t.}$ Dans ce cas on a :

$$\frac{z+t}{z-t} = -3 \Leftrightarrow z+t = -3z+3t \Leftrightarrow 4z = 2t \Leftrightarrow = 2z.$$

Ainsi :

$$\begin{cases} z^2+tz-2t^2 & = 20 \\ \frac{z+t}{z-t} & = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2+tz-2t^2 & = 20 \\ t & = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2+(2z)z-2(2z)^2 & = 20 \\ t & = 2z \end{cases} \quad \text{par substitution}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 & = -4 \\ t & = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \text{ ou } z & = -2i \\ t & = 2z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions (z,t) est donc :

$$\boxed{\{(2i,4i),(-2i,-4i)\}.}$$

Solution de l'exercice 4.5

1. **Calculs divers :**

   On trouve :

$$\boxed{1+j+j^2 = 0 \text{ et } j^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3p \\ j & \text{si } n = 3p+1 \\ j^2 = & \text{si } n = 3p+2 \end{cases}}$$

3. **Simplification de $(a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)$:**

   Le calcul donne, après maintes simplifications :

$$\begin{aligned} (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) &= (a+b+c)\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2} \\ &= a^3+b^3+c^3-3abc \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4.6

1. **Commutativité de l'opération $*$:**

   Elle découle de la symétrie entre z et z' dans la formule qui définit $z*z'$.

2. **Associativité de l'opération $*$:**

   Le calcul montre que :

$$(z*z')*z'' = zz'z'' + i(zz'+z'z''+zz'') - z - z' - z'' - 2i.$$

   On remarque que le résultat est inchangé si on remplace z par z', z' par z'' et z'' par z *i.e.* :

$$(z*z')*z'' = (z'*z'')*z.$$

   Ainsi en utilisant la question 1 on a :

$$(z*z')*z'' = (z'*z'')*z = z*(z'*z'').$$

3. **L'opération $*$ n'est pas bilinéaire :**
   Le calcul montre par exemple que la relation :
   $$(z+z')*z'' = z*z'' + z'*z''$$
   n'est vraie que lorsque $z'' = 1-i$.
4. **Unité de l'opération $*$:**
   On cherche z_0 ne dépendant par de z. Si un tel z_0 existe il vérifie en particulier $z_0 * 0 = 0$ d'où, par le calcul, il découle que
   $$\boxed{z_0 = 1-i.}$$
   Réciproquement, le calcul donne, pour tout z :
   $$(1-i)*z = z.$$
   Autre Méthode :
   $$z_0 * z = z \Leftrightarrow z_0 z + i(z+z_0) - 1 - i = z \Leftrightarrow z_0(z+i) = (1-i)(z+i).$$
   Autre Méthode :
   $$z_0 * z = z \Leftrightarrow z_0 z + i(z+z_0) - 1 - i = z \Leftrightarrow z(z_0+i-1) + (iz_0 - 1 - i) = 0.$$
   Comme on veut cette égalité pour tout $z \in \mathbb{C}$ on obtient que le polynôme :
   $$z \longmapsto z(z_0+i-1) + (iz_0 - 1 - i)$$
   est nul ce qui n'est possible que si ses coefficients sont nuls *i.e.*
   $$z_0 + i - 1 = iz_0 - 1 - i = 0 \Leftrightarrow z_0 = 1-i.$$
5. **Inversibilité pour l'opération $*$:**
   On cherche un z' qui dépend de z. Le calcul montre que pour tout $z \neq -i$ on peut prendre :
   $$\boxed{z' = \frac{2-iz}{z+i}.}$$

On peut aussi simplifier toute la résolution en remarquant que :
$$(z+i)(z'+i) = z*z' + i.$$
Plus généralement si $\mathbb{C} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$ est une bijection (ici $\varphi(z) = z+i$) on peut montrer de même que le produit défini par :
$$z *_\varphi z' = \varphi^{-1}(\varphi(z)\varphi(z')).$$
sera lui aussi commutatif, associatif, possède une unité, et tout élément distinct de $\varphi^{-1}(0)$ est inversible.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.7

On a :
$$\begin{aligned}
(z-a)(z-b) \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow (z-a)(z-b) = \overline{(z-a)(z-b)} \\
&\Leftrightarrow z^2 - (a+b)z + ab = \overline{z}^2 - (a+b)\overline{z} + ab \\
&\Leftrightarrow z^2 - \overline{z}^2 - (a+b)(z-\overline{z}) = 0 \\
&\Leftrightarrow (z-\overline{z})(z+\overline{z}) - (a+b)(z-\overline{z}) = 0 \\
&\Leftrightarrow (z-\overline{z})\left(z+\overline{z}-(a+b)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow z-\overline{z} = 0 \text{ ou } z+\overline{z}-(a+b) = 0 \\
&\Leftrightarrow z = \overline{z} \text{ ou } 2\mathrm{Re}\,(z) = a+b
\end{aligned}$$

Ainsi les nombres complexes z qui sont solutions sont les $\boxed{z \text{ réels}}$ ou tels que $\boxed{\mathrm{Re}\,(z) = \frac{a+b}{2}.}$

Solution de l'exercice 4.8

L'ensemble des solutions pour z est : $\boxed{\mathbb{R} - \{-1\}.}$

Solution de l'exercice 4.9

1. **Valeurs de z pour lesquelles $f(z)$ a un sens :**
On voit tout de suite que $f(z)$ est bien définie si et seulement si $z + \overline{z} \neq 0$. Comme $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$, cela signifie aussi que $\boxed{z \text{ n'est pas imaginaire pur.}}$

2. **Si z est réel non nul, alors $f(z)$ est réel :**
Si z est réel, on a $\overline{z} = z$ qui est réel aussi, d'où :
$$f(z) = \frac{2z - \overline{z} + 1}{z + \overline{z}}$$
qui est encore réel.

3. **Calcul de $f(x + iy)$:**
On calcule :
$$\begin{aligned} f(x+iy) &= \frac{2(x+iy) - (x-iy) + 1}{2x} - i(x+iy)(2iy) \\ &= \frac{x+1+3iy}{2x} + 2y(x+iy) \\ &= \frac{x+1+3iy+4xy(x+iy)}{2x} \\ &= \boxed{\frac{x+1+4x^2y}{2x} + i\frac{3y+4xy^2}{2x}} \end{aligned}$$

4. **Résolution de $f(z) = 0$:**
D'après la question précédente, pour $z = x + iy$ non imaginaire pure (*i.e.* $x \neq 0$), on a $f(z) = 0$ si et seulement si :
$$\frac{x+1+4x^2y}{2x} = 0 \text{ et } \frac{3y+4xy^2}{2x} = 0,$$
soit :
$$x + 1 + 4x^2y = 0 \text{ et } 3y + 4xy^2 = 0.$$
Or on a :
$$\begin{aligned} x+1+4x^2y = 0 \text{ et } 3y+4xy^2 = 0 &\Leftrightarrow y = -\frac{x+1}{4x^2} \text{ et } (y = 0 \text{ ou } 3 + 4xy = 0) \\ &\Leftrightarrow \left(y = 0 \text{ et } 0 = -\frac{x+1}{4x^2}\right) \text{ ou } \left(y = -\frac{x+1}{4x^2} \text{ et } y = -\frac{3}{4x}\right) \\ &\Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x = -1) \text{ ou } \left(y = -\frac{3}{4x} \text{ et } \frac{x+1}{x} = 3\right) \\ &\Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x = -1) \text{ ou } \left(x = \frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$
Il y a donc deux solutions : $\boxed{z = -1 \text{ ou } z = \frac{1}{2} - i\frac{3}{2}.}$

Solution de l'exercice 4.10

1. Écrire z sous forme algébrique et se ramener à un système linéaire 2×2. On trouve :

$$\boxed{z = \frac{-9-8i}{7}.}$$

2. $z = 1$.
3. Pas de solution car $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 4.12

1. $|z| = 1$. 2. $|z| = 1$. 3. $|z| = \sqrt{2}$.

Solution de l'exercice 4.14

Utiliser la relation suivante vue dans la démonstration de la proposition 4.2.2.

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2Re(z\overline{z'}) + |z'|^2$$

Solution de l'exercice 4.16

Même suggestion qu'à l'exercice 4.14.

Solution de l'exercice 4.17

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{2z-1}{z^2} \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2z-1}{z^2} = \overline{\left(\frac{2z-1}{z^2}\right)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2z-1}{z^2} = \frac{2\overline{z}-1}{\overline{z}^2} \\
&\Leftrightarrow \quad (2z-1)\overline{z}^2 = z^2(2\overline{z}-1) \\
&\Leftrightarrow \quad 2z\overline{z}^2 - 2z^2\overline{z} + z^2 - \overline{z}^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2z\overline{z} - (z+\overline{z}))(\overline{z} - z) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{z} = z \text{ ou } 2z\overline{z} - (z+\overline{z}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R} \text{ ou } z\overline{z} - \frac{z+\overline{z}}{2} = 0
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z - \frac{1}{2}\right)\overline{\left(z - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad z\overline{z} - \frac{z+\overline{z}}{2} = 0
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Solution de l'exercice 4.20

Notons :

$$Z = \frac{z + ab\overline{z} - (a+b)}{a-b}.$$

Il suffit de regarder si $\overline{Z} = -Z$. Par ailleurs comme a et b sont de module 1, on a $\overline{a} = \frac{1}{a}$ et $\overline{b} = \frac{1}{b}$, donc, d'après les propriétés de la conjugaison :

$$\begin{aligned}
\overline{Z} &= \frac{\overline{z} + \overline{a}\overline{b}z - (\overline{a} + \overline{b})}{\overline{a} - \overline{b}} \\
&= \frac{\overline{z} + \frac{z}{ab} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \\
&= \frac{\frac{ab\overline{z} + z - ab\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}{ab}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \\
&= \frac{ab\overline{z} + z - ab\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}{ab\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \\
&= \frac{ab\overline{z} + z - (a+b)}{b - a} \\
&= -Z
\end{aligned}$$

La réponse est donc $\boxed{\text{oui.}}$

Solution de l'exercice 4.21

C'est $|z|^2|z'|^2 = |zz'|^2$ avec :

$$z = a + ib \text{ et } z' = b' + ia'.$$

Solution de l'exercice 4.23

L'équation n'a de sens que pour $z \neq -1$. Remarquons qu'un nombre complexe a sa partie réelle nulle si et seulement s'il est imaginaire pur. On a donc :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0 &\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} = -\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} = -\frac{z-1}{z+1} \\
&\Leftrightarrow (\overline{z}-1)(z+1) = -(z-1)(\overline{z}+1) \\
&\Leftrightarrow \overline{z}z - z - \overline{z} - 1 = -\overline{z}z - z - \overline{z} + 1 \\
&\Leftrightarrow \overline{z} = 1 \\
&\Leftrightarrow |z| = 1
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des nombres complexes de module 1, à l'exception de -1 soit $\boxed{\mathbb{S}^1 - \{-1\}.}$

Solution de l'exercice 4.24

Si $z \neq -i$ on a :

$$\begin{aligned}
1 - \left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2 = 0 &\Leftrightarrow |z+i|^2 - |z-i|^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (z+i)(\overline{z}-i) - (z-i)(\overline{z}+i) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2i\overline{z} - 2iz = 0 \\
&\Leftrightarrow \overline{z} = z.
\end{aligned}$$

Les solutions sont donc les nombres complexes $\boxed{z \in \mathbb{R}.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.25

1. **Condition sur t pour que $\frac{1-it}{1+it}$ soit réel :**
   On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1-it}{1+it} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{1-it}{1+it} = \overline{\left(\frac{1-it}{1+it}\right)} \\
&\Leftrightarrow \frac{1-it}{1+it} = \frac{1+i\overline{t}}{1-i\overline{t}} \\
&\Leftrightarrow (1-it)(1-i\overline{t}) = (1+it)(1+i\overline{t}) \\
&\Leftrightarrow 1-i(t+\overline{t})-|t|^2 = 1+i(t+\overline{t})-|t|^2 \\
&\Leftrightarrow t+\overline{t} = 0 \\
&\Leftrightarrow t \in i\mathbb{R}
\end{aligned}$$

   En conclusion, comme l'énoncé n'a de sens que pour $t \neq i$, on a :

$$\boxed{z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t \in i\mathbb{R} - \{\, i \,\}.}$$

2. **Condition sur t pour que $\frac{1-it}{1+it}$ soit imaginaire pur :**
   Sachant que z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$, un calcul analogue au précédent donne :

$$\begin{aligned}
\frac{1-it}{1+it} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow 1-i(t+\overline{t})-|t|^2 = -(1+i(t+\overline{t})-|t|^2) \\
&\Leftrightarrow |t| = 1, \text{ soit } t \in \mathbb{S}^1
\end{aligned}$$

   En conclusion, comme l'énoncé n'a de sens que pour $t \neq i$, on a :

$$\boxed{z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t \in \mathbb{S}^1 - \{\, i \,\}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.26

Comme on a :

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1,$$

l'équation se ramène à

$$\boxed{|z| = 1 \text{ et } |z-1| = 1.}$$

Géométriquement cela correspond à l'intersection de deux cercles de rayon 1, centrés aux points d'affixes 0 et 1. Un rapide dessin montre qu'il y a deux points d'intersection d'affixes :

$$\boxed{z = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.27

$$\begin{aligned}
|x+iy|^2 = x^2+y^2 &\Leftrightarrow (x+iy)\overline{(x+iy)} = x^2+y^2 \\
&\Leftrightarrow (x+iy)(\overline{x}-i\overline{y}) = x^2+y^2 \\
&\Leftrightarrow (x+iy)(\overline{x}-i\overline{y}) = (x+iy)(x-iy) \\
&\Leftrightarrow (x+iy)\left(\overline{x}-i\overline{y}-x+iy\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow x+iy = 0 \text{ ou } x-\overline{x} = i(y-\overline{y}) \\
&\Leftrightarrow x+iy = 0 \text{ ou } \mathrm{Im}\,(x) = i\mathrm{Im}\,(y) \\
&\Leftrightarrow x+iy = 0 \text{ ou } \mathrm{Im}\,(x) = \mathrm{Im}\,(y) = 0 \text{ car } \mathrm{Im}\,(x), \mathrm{Im}\,(y) \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow x+iy = 0 \text{ ou } x, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.28

1. **Calcul de** $u^2+v^2+w^2$ **:**

$$\begin{aligned} u^2+v^2+w^2 &= \left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)^2-\left(\frac{z-z'}{1+zz'}\right)^2+\left(\frac{1-zz'}{1+zz'}\right)^2 \\ &= \frac{z^2+2zz'+z'^2-(z^2-2zz'+z'^2)+1-2zz'+z^2z'^2}{(1+zz')^2} \\ &= \frac{2zz'+1+z^2z'^2}{(1+zz')^2} \\ &= \frac{(1+zz')^2}{(1+zz')^2} \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

2. **Équivalence :** $u,v,w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\overline{z'}$**. :**
Si $z=\overline{z'}$, alors :

$$z+z'=2\mathrm{Re}\,(z),\ i(z-z')=-2\mathrm{Im}\,(z),\ 1-zz'=1-|z|^2 \text{ et } 1+zz'=1+|z|^2.$$

Ainsi il est clair que u,v,w seront réels.
Réciproquement, si u,v,w sont réels, alors :

$$w=\frac{1-zz'}{1+zz'}\Leftrightarrow zz'=\frac{1-w}{1+w}\in\mathbb{R}.$$

Comme de plus :

$$u+iv=\frac{z'}{1+zz'} \text{ et } u-iv=\frac{z}{1+zz'},$$

on aura :

$$\frac{\overline{z'}}{1+zz'}=\frac{\overline{z'}}{\overline{1+zz'}}=\overline{u+iv}=u-iv=\frac{z}{1+zz'},$$

d'où $\overline{z'}=z$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.29

1. (a) **On a** $1-\overline{a}z\neq 0$ **:**
En effet, on a :

$$|\overline{a}z|=|\overline{a}||z|=|a||z|<1.$$

Il n'est donc pas possible que $1-\overline{a}z=0$ car alors on aurait $|\overline{a}z|=1$.

(b) **Relation** $1-\dfrac{|z-a|^2}{|1-\overline{a}z|^2}=\dfrac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}$**. :**

On calcule :

$$\begin{aligned}
1-\frac{|z-a|^2}{|1-\overline{a}z|^2} &= \frac{|1-\overline{a}z|^2-|z-a|^2}{|1-\overline{a}z|^2}\\
&= \frac{1}{|1-\overline{a}z|^2}((1-\overline{a}z)\overline{(1-\overline{a}z)}-(z-a)\overline{(z-a)})\\
&= \frac{1}{|1-\overline{a}z|^2}((1-\overline{a}z)(1-a\overline{z})-(z-a)(\overline{z}-\overline{a}))\\
&= \frac{1}{|1-\overline{a}z|^2}(1-\overline{a}z-a\overline{z}+\overline{a}za\overline{z}-z\overline{z}+z\overline{a}+a\overline{z}-a\overline{a})\\
&= \frac{1}{|1-\overline{a}z|^2}(1+\overline{a}za\overline{z}-z\overline{z}-a\overline{a})\\
&= \frac{1}{|1-\overline{a}z|^2}(1+|z|^2|a|^2-|z|^2-|a|^2)\\
&= \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}
\end{aligned}$$

2. **$z \in D$ si et seulement si $\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \in D$:**
Comme $|a|<1$ on déduit $1-|a|^2>0$ d'où :

$$\begin{aligned}
z\in D &\Leftrightarrow |z|<1\\
&\Leftrightarrow 1-|z|^2>0\\
&\Leftrightarrow (1-|a|^2)(1-|z|^2)>0\\
&\Leftrightarrow \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}>0\\
&\Leftrightarrow 1-\frac{|z-a|^2}{|1-\overline{a}z|^2}>0\\
&\Leftrightarrow \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|<1\\
&\Leftrightarrow \frac{z-a}{1-\overline{a}z}\in D
\end{aligned}$$

3. **L'application f est une bijection :**
On a montré à la question précédente que si $z \in D$ alors $f(z) \in D$ *i.e.* f est bien à valeurs dans D. Pour $Z \in D$ $\boxed{\text{recherchons les antécédents de } Z \text{ par } f :}$

$$\begin{aligned}
f(z)=Z &\Leftrightarrow \frac{z-a}{1-\overline{a}z}=Z\\
&\Leftrightarrow z-a=Z(1-\overline{a}z) \text{ car } 1-\overline{a}z\neq 0\\
&\Leftrightarrow z-a=Z-Z\overline{a}z\\
&\Leftrightarrow z+Z\overline{a}z=a+Z\\
&\Leftrightarrow z(1+Z\overline{a})=a+Z\\
&\Leftrightarrow z=\frac{a+Z}{1+Z\overline{a}},
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est justifiée par le fait que $\boxed{1+Z\overline{a}\neq 0}$; en effet comme à la première question on a $|Z\overline{a}|<1$ car $Z \in D$ ce qui empêche que $Z\overline{a}=-1$.
On a ainsi montré que $\boxed{\text{tout élément } Z \text{ de } D \text{ a un unique antécédent } \frac{a+Z}{1+Z\overline{a}} \text{ par } f}$ et cet antécédent appartient bien à D d'après la question 2 (en remplaçant z par $-Z$). Par conséquent f est une bijection de D sur D.

Solution de l'exercice 4.33

Géométriquement c'est l'intersection de deux disques fermés, de rayon 1, centré aux points d'affixe -1 et 1. Un dessin montre qu'il y a un seul point d'intersection à savoir $\boxed{z = 0.}$

Solution de l'exercice 4.38

11.

$$\begin{aligned}\frac{(2-2i)^3}{\sqrt{3}-3i} &= \frac{(2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^3}{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}}\\ &= \frac{(2\sqrt{2})^3}{2\sqrt{3}}e^{i\left(-3\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}\\ &= \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{5\pi}{12}}\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}\frac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}} &= \frac{(5+11i\sqrt{3})(7+4i\sqrt{3})}{7^2+4^2}\\ &= \frac{-97+i97\sqrt{3}}{97}\\ &= -1+i\sqrt{3}\\ &= \boxed{2e^{i\frac{2\pi}{3}}.}\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4.42

1. $a + b = -1.$
2. $ab = 2.$
3. Donc a et b sont les racines de l'équation : $x^2 + x + 2$, soit :

$$\{a, b\} = \left\{\frac{-1+i\sqrt{7}}{2},\ b = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\right\}.$$

4. Un dessin permet d'estimer que $\mathrm{Im}\,(a) > 0$ alors que $\mathrm{Im}\,(b) < 0$ d'où :

$$\boxed{a = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \text{ et } b = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}.}$$

Solution de l'exercice 4.43

1.

$$\begin{aligned}& z^3 + 8i = 0\\ \Leftrightarrow\ & z^3 = -8i = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}\\ \Leftrightarrow\ & z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\\ & \text{ ou } z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}\\ & \text{ ou } z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}\\ \Leftrightarrow\ & z = \sqrt{3}-i \text{ ou } z = 2i \text{ ou } z = -\sqrt{3}-i.\end{aligned}$$

3 et 4. Commencer par montrer que les solutions sont de module 1, puis trouver leur argument.

8. Il y a six solutions données par :

$$z = \frac{1+\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}}}{\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}}-1},\quad k \in \{0, \ldots, 5\}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.44

1. **Résolution de $z^4 = 1$:**
   On écrit z sous forme trigonométrique : $z = re^{i\theta}$ avec $r \geqslant 0$
   Alors

$$z^4 = 1 \Leftrightarrow r^4 e^{i4\theta} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 1 \\ 4\theta = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow (r = 1 \text{ et } \theta = \frac{k\pi}{2}) \Leftrightarrow z \in \left\{ e^{i0}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{2\pi}{2}}, e^{i\frac{3\pi}{2}} \right\},$$

   soit finalement : $\boxed{z \in \{1, i, -1, -i\}.}$
   Autre méthode : on factorise $z^4 - 1$ par :

$$z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1) = (z + i)(z - i)(z1)(z - 1).$$

2. **Résolution de $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$:**
   L'équation n'est définie que pour $\boxed{z \neq i.}$ De plus, on reconnaît dans le premier membre la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = \begin{cases} 4 & \text{si } \frac{z+i}{z-i} = 1 \\ \frac{1-\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4}{1\left(\frac{z+i}{z-i}\right)} & \text{si } \frac{z+i}{z-i} \neq 1 \end{cases}.$$

   On a donc

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 0 \text{ et } \frac{z+i}{z-i} \neq 1.$$

   D'après la question précédente $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$ équivaut à $\frac{z+i}{z-i} \in \{1, i, -1, -i\}$; comme la valeur 1 n'est pas possible, l'équation initiale est donc équivalente à :

$$\boxed{\frac{z+i}{z-i} \in \{i, -1, -i\}.}$$

   Or

$$\frac{z+i}{z-i} = i \Leftrightarrow (z + i) = i(z - i) \Leftrightarrow z - iz = 1 - i \Leftrightarrow z = \frac{1-i}{1-i} = 1.$$

$$\frac{z+i}{z-i} = -1 \Leftrightarrow (z + i) = -(z - i) \Leftrightarrow z = 0.$$

$$\frac{z+i}{z-i} = -i \Leftrightarrow (z + i) = -i(z - i) \Leftrightarrow z + iz = -1 - i \Leftrightarrow z = \frac{-1-i}{1+i} = -1.$$

   Il y a donc $\boxed{\text{trois solutions : } 1, 0 \text{ et } -1.}$
   Autre méthode : on met tout au même dénominateur, on développe, on simplifie :

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = \frac{4z^3 - 4z}{(z-i)^3},$$

   et $4z^3 - 4z = 0$ a pour solutions $1, 0$ et -1.

Solution de l'exercice 4.47

1. **Calcul de $1 + j + j^2$:**
   Comme $j \neq 1$, on a :
$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = \frac{1 - \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3}{1 - j} = \frac{1 - 1}{1 - j} = 0.$$
2. **Rang de la matrice M :**
   C'est le rang du système linéaire $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$. Or :
$$\begin{cases} x + y + z & = 0 & L_1 \\ x + jy + j^2 z & = 0 & L_2 \\ x + j^2 y + jz & = 0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z & = 0 & L_1 \\ (j-1)y + (j^2-1)z & = 0 & L_2 - L_1 \to L_2 \\ (j^2-1)y + (j-1)z & = 0 & L_3 - L_1 \to L_3 \end{cases}$$
   Comme $j^2 - 1 = (j-1)(j+1)$ et que $j - 1 \neq 0$ on simplifie les deux dernières lignes par $j - 1$:
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z & = 0 & L_1 \\ y + (j+1)z & = 0 & L_2 \\ (j+1)y + z & = 0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z & = 0 & L_1 \\ y + (j+1)z & = 0 & L_2 \\ (1 - (j+1)^2)z & = 0 & L_3 - (j+1)L_2 \end{cases}$$
   Comme :
$$1 - (j+1)^2 = -j^2 - 2j = -j(j+2) \neq 0,$$
   le système échelonné est de Cramer. Ainsi $\boxed{M \text{ est de rang } 3.}$

Solution de l'exercice 4.50

1. **Résolution de $z^3 = 1$:**
   Si on écrit z sous forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$ l'équation $z^3 = 1$ équivaut à :
$$r^3 e^{i3\theta} = 1 = e^{i0}.$$
   On sait donc qu'alors :
$$r^3 = 1 \text{ et } 3\theta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$
   Les solutions sont donc les nombres :
$$z = re^{i\theta} = e^{i\frac{2k\pi}{3}},\ k \in \mathbb{Z}.$$
   Compte-tenu de la périodicité de l'exponentielle on ne trouve en fait que trois valeurs distinctes, pour $k = 0, 1, 2$ par exemple, soit :
$$z = 1,\ z = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j,\ z = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = j^2.$$
2. **Forme trigonométrique de $2 + j$ et $2 + j^2$:**
   On a :
$$j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
   On déduit donc, en calculant le module :
$$2 + j = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Par ailleurs

$$j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{2i\pi - \frac{2i\pi}{3}} = \overline{e^{\frac{2i\pi}{3}}},$$

donc $2+j$ et $2+j^2$ sont conjugués. On conclut ainsi que $\boxed{2+j = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } 2+j^2 = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}.}$

3. **Résolution de $(3\lambda-2)^3 - 1 = 0$:**
   L'équation s'écrit encore :

$$z^3 = 1 \text{ et } z = 3\lambda - 2.$$

   D'après la question 1, les solutions sont donc

$$\lambda = \frac{2+z}{3} \text{ avec } z = 1, j, j^2,$$

   soit $\boxed{\lambda \in \left\{1, \frac{2+j}{3}, \frac{2+j^2}{3}\right\}.}$

4. **Relation $\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n = 1 + \frac{2}{(\sqrt{3})^n}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$. :**
   D'après les calculs précédents on a :

$$\begin{aligned}
\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n &= 1^n + \left(\frac{2+j}{3}\right)^n + \left(\frac{2+j^2}{3}\right)^n \\
&= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}^n}e^{i\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}^n}e^{-i\frac{\pi}{6}} \\
&= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}^n}\left(e^{i\frac{n\pi}{6}} + e^{-i\frac{n\pi}{6}}\right) \\
&= 1 + \frac{2}{\sqrt{3}^n}\cos\frac{n\pi}{6}
\end{aligned}$$

   n.b. : il n'y a pas besoin de faire de démonstration par récurrence.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.51

Mettre $1+i$ et $1-i$ sous forme trigonométrique et procéder comme dans la question 4 de l'exercice 4.50.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.53

1. **Résolution du système :**
   Si x et y sont solution du système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} & L_1 \\ x^2 + y^2 = 1 & L_2 \\ 2xy = \frac{1}{\sqrt{2}} & L_3 \end{cases}$$

   On déduit :

$$2x^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad L_1 + L_2$$

$$2y^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad L_2 - L_1$$

   On a donc

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}} \text{ et } y = \pm\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}}.$$

On obtient ainsi 4 couples (x, y) qui, par construction, vérifient les relations L_1 et L_2. Pour que L_3 soit vérifiée il faut que x et y soient de même signe et comme :

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(2\sqrt{2})^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

les deux couples obtenus sont bien des solutions, à savoir :

$$\boxed{(x, y) = \left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}, \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right) \text{ ou } (x, y) = \left(-\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}, -\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right).}$$

2. **Solution z :**
Si on écrit z sous forme algébrique $z = x + iy$, on a :

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

L'équation $z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ est donc équivalente à :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2xy = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Par ailleurs le nombre complexe $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ est de module 1, donc, si $z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, alors z aussi est de module 1, donc $x^2 + y^2 = 1$. Ainsi l'équation $z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ est équivalente à :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

D'après la question précédente on a donc deux solutions :

$$\boxed{z = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}} \text{ ou } z = -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}} - i\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}}}$$

3. **Valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$:**
Comme

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{\frac{\pi}{4}},$$

si on écrit z sous forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$ on a :

$$\begin{aligned} z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad & \Leftrightarrow \quad r^2 e^{i2\theta} = e^{\frac{\pi}{4}} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{8} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad z = e^{i\frac{\pi}{8}} \text{ ou } z = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)} = -e^{i\frac{\pi}{8}} \end{aligned}$$

Ainsi l'équation $z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ a deux solutions $e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{8}}$.

Par comparaison avec le résultat de la question précédente on a donc

$$\{e^{i\frac{\pi}{8}}, -e^{i\frac{\pi}{8}}\} = \left\{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}+i\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}}, -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}-i\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right\}$$

De

$$e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8},$$

et sachant que $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$ sont positifs, il s'ensuit que

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}} \text{ et } \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}}.}$$

4. **Calcul de $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^{32}$:**
   On a :

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^{32} &= \left(2\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}+i\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)\right)^{32} \\
&= \left(2e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^{32} \\
&= 2^{32}e^{i4\pi} = 2^{32}.
\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.54

L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{-\tan\left(\frac{a}{n}+\frac{k\pi}{n}\right) \;\middle|\; k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.55

1. $u = \dfrac{\cos^4 x(1+\tan^4 x)}{\cos^4 x(1-\tan^4 x)} = \dfrac{1+\tan^4 x}{1-\tan^4 x}$
2.

$$\begin{aligned}
v &= \frac{\cos^3 x(1+\tan^3 x)}{\cos x(1+\tan x)} \\
&= \frac{1}{\tan^2 x+1}\frac{1+\tan^3 x}{1+\tan x} \text{ car } 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \boxed{\frac{1-\tan x+\tan^2 x}{\tan^2 x+1}} \text{ car } \frac{1+X^3}{1+X} = 1-X+X^2
\end{aligned}$$

3. $w = \dfrac{1-\tan x}{1+\tan^2 x}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.57

Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la relation :

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

– Pour $n = 1$ la relation s'écrit :

$$\sin x = \frac{\sin x \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Elle est donc vraie

– Si la relation est vraie à l'ordre n, on a alors :

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx + \sin(n+1)x &= \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} + \sin(n+1)x \\ &= \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2} + \sin(n+1)x \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Or d'après la formule d'addition des angles pour le sinus on a :

$$\sin \frac{nx}{2} = \sin\left(\frac{(n+1)x}{2} - \frac{x}{2}\right) = -\cos \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$\sin \frac{(n+2)x}{2} = \sin\left(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{x}{2}.$$

D'où, par différence :

$$\sin \frac{nx}{2} - \sin \frac{(n+2)x}{2} = -2\cos \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{x}{2},$$

soit encore :

$$\sin \frac{nx}{2} + 2\cos \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{(n+2)x}{2}.$$

En multipliant par $\sin \frac{(n+1)x}{2}$, et en utilisant la relation $\sin(n+1)x = 2\sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}$, on obtient :

$$\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2} + \sin(n+1)x \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{(n+2)x}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}.$$

Ainsi :

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx + \sin(n+1)x = \frac{\sin \frac{(n+2)x}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

ce qui prouve que la relation est vraie à l'ordre $n+1$.

Autre méthode :

On a :

$$\begin{aligned}
& \sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx \\
= & \sin 0x+\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx \quad \text{car } \sin 0=0 \\
= & \sum_{k=0}^{n}\sin(kx) \\
= & \sum_{k=0}^{n}\operatorname{Im}\left(e^{ikx}\right) \\
= & \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}\right) \quad \text{par linéarité de la partie imaginaire} \\
= & \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(e^{ix}\right)^k\right) \\
= & \operatorname{Im}\left(\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right) \quad \text{somme des termes d'une suite géométrique de raison } e^{ix}\neq 1\ (x\neq 0+2k\pi) \\
= & \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}}\left(e^{-i\frac{(n+1)x}{2}}-e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}\right)}\right) \quad \text{astuce!} \\
= & \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{nx}{2}}\frac{-2i\sin\frac{(n+1)x}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}}\right) \\
= & \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\operatorname{Im}\left(e^{i\frac{nx}{2}}\right) \\
= & \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4.59

Raisonner par récurrence et utiliser de la trigonométrie.

Solution de l'exercice 4.60

Utiliser les formules de sommation classiques du chapitre 2 (formule de binôme, somme des x^k,etc.).

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)=\frac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ (prendre la partie réelle dans la second méthode de l'exercice 4.57).

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos((k+1)x)=2^n\cos\frac{n+2}{2}x\cos^n\frac{x}{2}$. (utiliser la formule du binôme)

10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(x+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n=n(1+x^n)$ (développer $\left(x+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n$ par la formule du binôme).

11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}ke^{i\frac{2k\pi}{n}}=\frac{n}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1}$.

Solution de l'exercice 4.62

1. **Relation $R_\alpha R_\beta=R_{\alpha+\beta}$:**

On calcule :

$$\begin{aligned}
R_\alpha R_\beta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ 0 & \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ 0 & \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \text{ d'après les formules de duplication des angles} \\
&= R_{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

2. **Inversibilité et inverse de R_α :**
D'après la question précédente, on a

$$R_\alpha R_{-\alpha} = R_{\alpha+(-\alpha)} = R_0 = I.$$

Ainsi R_α est inversible d'inverse $R_{-\alpha}$:

$$\boxed{R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha}.}$$

3. **Calcul de $SR_\alpha S$. :**
On a :

$$\begin{aligned}
SR_\alpha S &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ 0 & \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \\
&= R_{-\alpha}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\boxed{SR_\alpha S = R_{-\alpha}.}$$

4. **Puissances de R_α. :**
Montrons par récurrence sur $n \geqslant 0$ la relation :

$$\boxed{R_\alpha^n = R_{n\alpha}.}$$

– La relation est vraie pour $n = 0$, car :

$$R_\alpha^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_0.$$

– Si la relation est vraie pour l'entier n alors

$$R_\alpha^{n+1} = R_\alpha^n R_\alpha = R_{n\alpha} R_\alpha = R_{n\alpha+\alpha},$$

d'après le résultat de la question 1. On obtient ainsi

$$R_\alpha^{n+1} = R_{(n+1)\alpha},$$

donc la relation est vraie à pour l'entier $n+1$.

5. **Calcul de $\cos^n \alpha$:**
On a, d'une part :

$$(R_\alpha + R_{-\alpha})^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2\cos\alpha \end{pmatrix}^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}^n.$$

Par une récurrence évidente, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^n\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos^n\alpha \end{pmatrix},$$

d'où

$$\boxed{(R_\alpha + R_{-\alpha})^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^n\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos^n\alpha \end{pmatrix}.}$$

D'autre part, comme les matrices R_α et $R_{-\alpha}$ commutent puisqu'elles sont inverses l'une de l'autre, en utilisant la formule du binôme on a :

$$\begin{aligned} (R_\alpha + R_{-\alpha})^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k R_\alpha^k R_{-\alpha}^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k R_{k\alpha} R_{-(n-k)\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k R_{(2k-n)\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos((2k-n)\alpha) & -\sin((2k-n)\alpha) \\ 0 & \sin((2k-n)\alpha) & \cos((2k-n)\alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{(R_\alpha + R_{-\alpha})^n = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n C_n^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^n C_n^k \cos((2k-n)\alpha) & -\sum_{k=0}^n C_n^k \sin((2k-n)\alpha) \\ 0 & \sum_{k=0}^n C_n^k \sin((2k-n)\alpha) & \sum_{k=0}^n C_n^k \cos((2k-n)\alpha) \end{pmatrix}.}$$

Les deux matrices obtenues sont égales, d'où l'égalité entre coefficients. En particulier :

$$\boxed{2^n \cos^n\alpha = \sum_{k=0}^n C_n^k \cos((2k-n)\alpha).}$$

Solution de l'exercice 4.64

Les solutions de l'équation caractéristique sont $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que le terme général soit :

$$u_n = A\cos\frac{n\pi}{3} + B\sin\frac{n\pi}{3}.$$

La résolution d'un système linéaire 2×2 donne $A = B = 1$, d'où :

$$\begin{aligned} u_n &= \cos\frac{n\pi}{3} + \sin\frac{n\pi}{3} \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{n\pi}{3}\right) \\ &= \sqrt{2}\cos\left(n\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Ainsi on trouve $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{3},\ \beta = -\frac{\pi}{4} \text{ et } r = \sqrt{2}.}$

Solution de l'exercice 4.65

1. **Calcul de u_n en fonction de n :**
   On a affaire à une suite définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. On calcule son équation caractéristique :
   $$x^2 - 2\cos\alpha x + 1 = 0.$$
   Son discriminant vaut :
   $$\Delta = 4\cos^2\alpha - 4 = -4\sin^2\alpha.$$
   Comme α est dans l'intervalle $]0, \pi[$, alors Δ est strictement négatif. Ainsi l'équation admet deux racines complexes conjuguées distinctes :
   $$x_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha} \text{ et } x_2 = \cos\alpha - i\sin\alpha = e^{-i\alpha}.$$
   Et la suite (u_n) est de la forme :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\cos(n\alpha) + \mu\sin(n\alpha),\ \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
   On calcule λ et μ grâce aux valeurs de u_0 et u_1 :
   $$\begin{cases} 0 = u_0 &= \lambda \\ 1 = u_1 &= \lambda\cos\alpha + \mu\sin\alpha, \end{cases}$$
   soit $\lambda = 0, \mu = \frac{1}{\sin\alpha}$. On conclut donc que :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha}.}$$

2. **Calcul de A^n :**
   Recherche du résultat
   Le calcul des premières puissances donne :
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos\alpha \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2\cos\alpha \\ -2\cos\alpha & 4\cos^2\alpha - 1 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} -2\cos\alpha & 4\cos^2\alpha - 1 \\ -4\cos^2\alpha + 1 & 8\cos^3\alpha - 4\cos\alpha \end{pmatrix}.$$
   Ainsi on remarque que ces puissances successives ont l'air d'être de la forme
   $$A^n = \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \text{ avec } A^{n+1} = \begin{pmatrix} -b & c \\ -c & d \end{pmatrix}.$$

Si on recherche comment calculer d en fonction de a, b, c, d'après la relation $A^{n+1} = A^n A$, on trouve $d = 2\cos\alpha c - b$. Ainsi le lien avec la question précédente apparaît.
Rédaction du résultat :
Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la relation :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} -u_{n-1} & u_n \\ -u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}}$$

– D'après la définition de u_n on a :

$$u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2\cos\alpha u_1 - u_0 = 2\cos\alpha.$$

On déduit immédiatement que :

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_0 & u_1 \\ -u_1 & u_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la relation est vraie pour $n = 1$.
– Si la relation est vraie à l'ordre n alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= A^n = \begin{pmatrix} -u_{n-1} & u_n \\ -u_n & u_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -u_n & 2\cos\alpha u_n - u_{n-1} \\ -u_{n+1} & 2\cos\alpha u_{n+1} - u_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -u_n & u_{n+1} \\ -u_{n+1} & u_{n+2} \end{pmatrix} \text{ d'après la définition de } (u_n) \end{aligned}$$

Ainsi la relation est vraie à l'ordre $n + 1$.
Cette récurrence et la question précédente permettent de conclure que :

$$\boxed{A^n = \frac{1}{\sin\alpha} \begin{pmatrix} \sin(n-1)\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \sin(n+1)\alpha \end{pmatrix}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.66

1. $\sin^3 t = -\frac{1}{4}\sin 3t + \frac{2}{4}\sin t$.
3. $\cos^5 t = \frac{1}{16}(\cos 5t + 5\cos 3t + 10\cos t)$.
5. $\cos^3 t \sin^2 t = -\frac{1}{16}(\cos 5t + \cos 3t - 2\cos t)$ **:**
6. $4\cos^3 t \sin t - 4\cos t \sin^3 t = \sin 4t$ **:**
   D'après les formules d'Euler et la formule du binôme :

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \quad \text{et} \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

on a :

$$\begin{aligned}
4\cos^3 t\sin t-4\cos t\sin^3 t &= 4\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}-4\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\\
&= \frac{1}{4i}\left((e^{it}+e^{-it})^3(e^{it}-e^{-it})+(e^{it}-e^{-it})^3(e^{it}+e^{-it})\right)\\
&= \frac{1}{4i}\left((e^{i3t}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-i3t})(e^{it}-e^{-it})\right)\\
&\quad+\frac{1}{4i}\left((e^{i3t}-3e^{it}+3e^{-it}-e^{-i3t})(e^{it}+e^{-it})\right)\\
&= \frac{1}{4i}\left((e^{i4t}+3e^{i2t}+3+e^{-i2t}-e^{i2t}-3-3e^{-i2t}-e^{-i4t})\right)\\
&\quad+\frac{1}{4i}\left((e^{i4t}-3e^{i2t}+3-e^{-i2t}+e^{i2t}-3+3e^{-i2t}-e^{-i4t})\right)\\
&= \frac{1}{4i}\left(2e^{i4t}-2e^{-i4t}\right)\\
&= \sin(4t)
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient : $\boxed{4\cos^3 t\sin t-4\cos t\sin^3 t=\sin(4t).}$

7. $\sin^2(2t)\cos^2 t\cos 2t=-\frac{1}{16}(\cos 8t+2\cos 6t-2\cos 2t-1)$ **:**

Solution de l'exercice 4.67

Linéariser et utiliser les résultats des exercices 4.57 et 4.60, n°1.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx)=\frac{n}{2}-\frac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}$.

Solution de l'exercice 4.71

On linéarise les deux membres :

$$\begin{aligned}
\cos^3 2x &= \left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}\right)^3\\
&= \frac{1}{8}\left(e^{i6x}+3e^{i2x}+3e^{-i2x}+e^{-i6x}\right)\\
&= \frac{1}{4}(\cos 6x+3\cos 2x)\\
\sin 3x\sin^3 x+\cos 3x\cos^3 x &= \left(\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3+\left(\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}\right)\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\\
&= \frac{1}{16}\left(e^{i3x}-e^{-i3x}\right)\left(e^{i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-i3x}\right)\\
&\quad+\frac{1}{16}\left(e^{i3x}+e^{-i3x}\right)\left(e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}\right)\\
&= \frac{1}{16}e^{i3x}\left(\left(e^{i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-i3x}\right)+\left(e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}\right)\right)\\
&\quad+\frac{1}{16}e^{-i3x}\left(-\left(e^{i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-i3x}\right)+\left(e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}\right)\right)\\
&= \frac{1}{16}e^{i3x}\left(2e^{i3x}+6e^{-ix}\right)+\frac{1}{16}e^{-i3x}\left(6e^{ix}+2e^{-i3x}\right)\\
&= \frac{1}{16}\left(2e^{i6x}+6e^{i2x}+6e^{-i2x}+2e^{-i6x}\right)\\
&= \frac{1}{4}(\cos 6x+3\cos 2x)
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4.72

$\boxed{\text{Linéarisons}}$ les deux membres pour trouver α :

$$\begin{aligned}
\cos^2 x \sin^4 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 \text{ d'après les formules d'Euler}\\
&= \frac{1}{2^6}\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right)\left(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)\\
&= \frac{1}{2^6}\left(e^{6ix}-2e^{4ix}-e^{2ix}+4-e^{-2ix}-2e^{-4ix}+e^{-6ix}\right)\\
&= \frac{1}{2^6}\left(2\cos 6x-4\cos 4x-2\cos 2x+4\right)\\
&= \frac{1}{32}\left(\cos 6x-2\cos 4x-\cos 2x+2\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos^2 x-\cos 4x-\cos 2x+\cos^2 3x &= \frac{\cos 2x+1}{2}-\cos 4x-\cos 2x+\frac{\cos 6x+1}{2} \text{ d'après } \cos 2x = 2\cos^2-1\\
&= \frac{1}{2}\cos 6x-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+1\\
&= \frac{1}{2}\left(\cos 6x-2\cos 4x-\cos 2x+2\right).
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\boxed{\alpha = \frac{1}{16}.}$

Autre méthode : tout exprimer en fonction de $\cos x$ (en utilisant plusieurs fois les formules d'addition ou de duplication). On trouve :

$$\cos^2 x \sin^4 x = \cos^6 x - 2\cos^4 x + \cos^2 x.$$

$$\cos^2 x-\cos 4x-\cos 2x+\cos^2 3x = 16\left(\cos^6 x-2\cos^4 x+\cos^2 x\right).$$

Solution de l'exercice 4.74

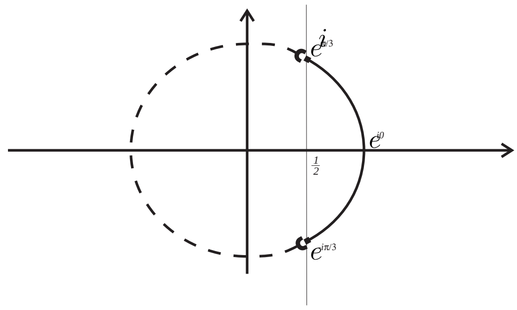
$$\cos 6t = 32x^6-48x^4+18x^2-1 \text{ avec } x=\cos t.$$

Solution de l'exercice 4.76

4. **Résolution de** $2\cos^2 x-3\cos x+1<0$ **:**

$$\begin{aligned}
2\cos^2 x-3\cos x+1\leqslant 0 &\Leftrightarrow \begin{cases}2X^2-3X+1\leqslant 0\\ X=\cos x\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant X\leqslant 1\\ X=\cos x\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\leqslant \cos x\leqslant 1
\end{aligned}$$

Un dessin :



montre que :

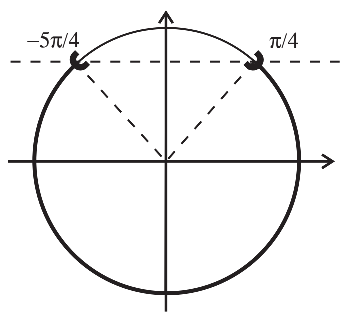
$$\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 \Leftrightarrow \boxed{\exists k \in \mathbb{K},\ x \in \left[-\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right]}.$$

8. **Résolution de $\sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{2} < 0$:**
On a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\cos x + \sin x &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) \\
&= 2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right) \\
&= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{2} < 0 &\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < \sin\frac{\pi}{4} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x + \frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[\text{ d'après le dessin ci-après} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \left]-\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right[\\
&\Leftrightarrow \boxed{\exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \left]-\frac{19\pi}{12} + 2k\pi, -\frac{\pi}{12} + 2k\pi\right[}
\end{aligned}$$



Autre méthode : On peut aussi transformer l'équation initiale en : $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < \cos\frac{\pi}{4}$ et faire le dessin correspondant.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.78

1. **Valeurs de m pour lesquelles les solutions sont réelles :**
Les solutions de cette équation du second degré en x sont réelles si et seulement si sont discriminant est positif ou nul à savoir :

$$\boxed{\underbrace{(4\cos m)^2 - 4(2+4\cos 2m)}_{=\Delta} \geqslant 0.}$$

Or :

$$\begin{aligned}\Delta &= 16\cos^2 m - 8 - 16\cos 2m \\ &= 16\left(\frac{\cos 2m + 1}{2}\right) - 8 - 16\cos 2m \text{ car } \cos 2m = 2\cos^2 m - 1 \\ &= -8\cos 2m\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\Delta \geqslant 0 &\Leftrightarrow \cos 2m \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ 2m \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] \\ &\Leftrightarrow \boxed{\exists k\in\mathbb{Z},\ m \in \left[\tfrac{\pi}{4} + k\pi, \tfrac{3\pi}{4} + k\pi\right]}\end{aligned}$$

2. **Solutions pour $m = \frac{\pi}{6}$. :**
L'équation s'écrit alors :

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 4 = 0$$

Elle admet deux solutions

$$\boxed{x = -\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{5\pi}{6}} \text{ ou } x = -\sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{5\pi}{6}}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.80

1. **Forme trigonométrique de $e^{i3x} + e^{i5x} + e^{i7x}$:**
On a :

$$\begin{aligned}e^{i3x} + e^{i5x} + e^{i7x} &= e^{i3x}\left(1 + e^{i2x} + e^{i4x}\right) \\ &= e^{i3x}\left(\frac{1-(e^{i2x})^3}{1-e^{i2x}}\right) \text{ si } e^{i2x} \neq 1 \\ &= e^{i3x}\frac{e^{i3x}\left(e^{-i3x} - e^{i3x}\right)}{e^{ix}\left(e^{-ix} - e^{ix}\right)} \\ &= e^{i5x}\frac{-2i\sin 3x}{-2i\sin x} \\ &= \frac{\sin 3x}{\sin x}e^{i5x}\end{aligned}$$

Si $\sin 3x$ et $\sin x$ sont de même signe, soit $x \in \left[(2k-1)\frac{\pi}{3}, \frac{2k\pi}{3}\right]$ $(k\in\mathbb{Z})$ cette expression est la forme trigonométrique de $e^{i3x} + e^{i5x} + e^{i7x}$. Sinon il faut l'écrire

$$e^{i3x} + e^{i5x} + e^{i7x} = -\frac{\sin 3x}{\sin x}e^{i(5x+\pi)}.$$

Enfin, si $e^{i2x} = 1$, soit $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ le calcul n'est plus valable ; on obtient directement

$$e^{i3x} + e^{i5x} + e^{i7x} = e^{i3x}\left(1 + e^{i2x} + e^{i4x}\right) = 3e^{ix}.$$

En résumé

$$\boxed{e^{i3x} + e^{i5x} + e^{i7x} = \begin{cases} 3e^{ix} & \text{si } x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \frac{\sin 3x}{\sin x} e^{i5x} & \text{si } x \neq k\pi \text{ et } x \in \left[(2k-1)\frac{\pi}{3}, \frac{2k\pi}{3}\right] \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ -\frac{\sin 3x}{\sin x} e^{i(5x+\pi)} & \text{si } x \neq k\pi \text{ et } x \notin \left[(2k-1)\frac{\pi}{3}, \frac{2k\pi}{3}\right] \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}}$$

Autre méthode :

$$e^{i3x} + e^{i5x} + e^{i7x} = e^{i5x}\left(e^{-2ix} + 1 + e^{2x}\right) = e^{i5x}(1 + 2\cos 2x),$$

d'où deux cas en fonction du signe de $1 + 2\cos 2x$.

2. **Résolution de** $\sin 5x = 0$ **:**

D'après le cours :

$$\boxed{\sin x = \sin y \Leftrightarrow x = y + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - y + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

L'équation $\sin 5x = 0 = \sin 0$ est donc équivalente à : $5x = k\pi,\ k\mathbb{Z}$,
soit $x = \frac{k\pi}{5}$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{\left\{ \frac{k\pi}{5} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

3. **Résolution de** $\sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$ **:**

On reconnaît que

$$\sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = \operatorname{Im}\left(e^{i3x} + e^{i5x} + e^{i7x}\right).$$

D'après le calcul de la question 1, si x est multiple de π cette expression ne peut être nulle puisque son module vaut 3. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\sin 3x}{\sin x} \sin 5x = 0 \text{ et } x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow \quad (\sin 3x = 0 \text{ ou } \sin 5x0) \text{ et } \sin x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x = k\frac{\pi}{3} \text{ ou } x = k\frac{\pi}{5}) \text{ et } x \neq k'\pi \quad (k, k' \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc : $\boxed{\left\{ k\frac{\pi}{3}, k\frac{\pi}{5}) \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} - \{ k'\pi \mid k' \in \mathbb{Z} \}.}$

4. **Identité** $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\sin 3x + \sin 5x + \sin 7x} = \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$ **:**

Cette identité s'écrit aussi : $(\sin x + \sin 3x + \sin 5x)\sin 5x = (\sin 3x + \sin 5x + \sin 7x)\sin 3x$
Soit en développant et en simplifiant : $(\sin x + \sin 5x)\sin 5x = (\sin 3x + \sin 7x)\sin 3x$.

Or d'après les formules d'Euler, on a :

$$\begin{aligned}
(\sin x+\sin 5x)\sin 5x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}+\frac{e^{i5x}-e^{-i5x}}{2i}\right)\frac{e^{i5x}-e^{-i5x}}{2i}\\
&= \frac{1}{4i^2}\left(e^{ix}-e^{-ix}+e^{i5x}-e^{-i5x}\right)\left(e^{i5x}-e^{-i5x}\right)\\
&= \frac{1}{4i^2}\left(e^{i6x}-e^{i4x}+e^{i10x}-1-(e^{-4x}-e^{-i6x}+1-e^{-i10x})\right)\\
&= -\frac{1}{4}\left(e^{i6x}+e^{-i6x}-e^{i4x}-e^{-4x}+e^{i10x}+e^{-i10x}-2\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\cos 6x-\cos 4x+\cos 10x-1\right)\\
(\sin 3x+\sin 7x)\sin 3x &= \left(\frac{e^{i7x}-e^{-i7x}}{2i}+\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right)\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\\
&= \frac{1}{4i^2}\left(e^{i7x}-e^{-i7x}+e^{i3x}-e^{-i3x}\right)\left(e^{i3x}-e^{-i3x}\right)\\
&= \frac{1}{4i^2}\left(e^{i10x}-e^{-i4x}+e^{i6x}-1-(e^{4x}-e^{-i10x}+1-e^{-i6x})\right)\\
&= -\frac{1}{4}\left(e^{i6x}+e^{-i6x}-e^{i4x}-e^{-4x}+e^{i10x}+e^{-i10x}-2\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\cos 6x-\cos 4x+\cos 10x-1\right)
\end{aligned}$$

Ainsi l'égalité annoncée est vraie.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.82

Le système est de Cramer si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} \sin 2\theta & \sin\theta \\ \cos 2\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

est inversible ; cela se produit lorsque :

$$\sin 2\theta\cos\theta-\cos 2\theta\sin\theta\neq 0.$$

La formule du sinus d'une somme donne :

$$\sin\theta=\sin(2\theta-\theta)=\sin 2\theta\cos\theta-\sin\theta\cos 2\theta.$$

La condition d'inversibilité est donc :

$$\theta\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, on sait que l'inverse de la matrice vaut :

$$\frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\cos 2\theta & \sin 2\theta \end{pmatrix},$$

et le système a une unique solution :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\cos 2\theta & \sin 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin 3\theta \\ 2(\cos\theta)(\cos 2\theta) \end{pmatrix},$$

soit :

$$x=\frac{1}{\sin\theta}\left(\cos\theta\sin 3\theta-(\sin\theta)2(\cos\theta)(\cos 2\theta)\right),$$

$$y = \frac{1}{\sin\theta}\left(-\cos 2\theta \sin 3\theta + (\sin 2\theta)2(\cos\theta)(\cos 2\theta)\right).$$

On simplifie ces expressions en remarquant que :

$$\sin 3\theta = \sin(\theta + 2\theta) = \sin 2\theta\cos\theta + \sin\theta\cos 2\theta,$$

d'où :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sin\theta}\left(\cos\theta\sin 3\theta - 2\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\right)\\
&= \frac{1}{\sin\theta}\left(\cos\theta(\sin 2\theta\cos\theta + \sin\theta\cos 2\theta) - 2\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\right)\\
&= \frac{1}{\sin\theta}\left(\cos\theta\sin 2\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\right)\\
&= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(\sin 2\theta\cos\theta - \sin\theta\cos 2\theta\right)\\
&= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin(2\theta - \theta)\\
&= \cos\theta\\
y &= \frac{1}{\sin\theta}\left(-\cos 2\theta\sin 3\theta + 2\sin 2\theta\cos\theta\cos 2\theta\right)\\
&= \frac{1}{\sin\theta}\left(-\cos 2\theta(\sin 2\theta\cos\theta + \sin\theta\cos 2\theta) + 2\sin 2\theta\cos\theta\cos 2\theta\right)\\
&= \frac{1}{\sin\theta}\left(-\sin\theta\cos^2 2\theta + \sin 2\theta\cos\theta\cos 2\theta\right)\\
&= \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}\left(-\sin\theta\cos 2\theta + \sin 2\theta\cos\theta\right)\\
&= \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}\sin(2\theta - \theta)\\
&= \cos 2\theta
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{si } \theta \text{ n'est pas multiple de } \pi \text{ il y a une seule solution } (x, y) = (\cos\theta, \cos 2\theta).}$
Lorsque θ est multiple de π, on a $\sin\theta = \sin 2\theta = 0$. La première équation du système est donc $0 = 0$. Pour la deuxième équation deux cas sont possibles :

- $\boxed{\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$: alors $\cos\theta = \cos 2\theta = 1$; les solutions du système sont donc les points de la $\boxed{\text{droite d'équation } x + y = 2.}$
- $\boxed{\theta = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}}$: alors $\cos\theta = -1$ et $\cos 2\theta = 1$ les solutions du système sont donc les points de la $\boxed{\text{droite d'équation } -x + y = -2.}$

Solution de l'exercice 4.83

Rappelons la propriété fondamentale suivante des nombres complexes :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = x' \\ y = y' \end{array}\right. \Leftrightarrow x + iy = x' + iy'.}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \cos a + \cos(a+x) + \cos(a+y) &= 0 \\ \sin a + \sin(a+x) + \sin(a+y) &= 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & (\cos a + \cos(a+x) + \cos(a+y)) + i(\sin a + \sin(a+x) + \sin(a+y)) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & e^{ia} + e^{i(a+x)} + e^{i(a+y)} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 1 + e^{ix} + e^{iy} = 0 \qquad \text{en simplifiant par } e^{ia} \text{ qui n'est pas nul} \\
\Leftrightarrow \quad & e^{ix} + e^{iy} = -1 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{i\frac{-x+y}{2}}\right) e^{i\frac{x+y}{2}} = -1 \\
\Leftrightarrow \quad & 2\cos\frac{x-y}{2} e^{i\frac{x+y}{2}} = -1 \\
\Leftrightarrow \quad & -2\cos\frac{x-y}{2} = e^{-i\frac{x+y}{2}}
\end{aligned}$$

Or le cosinus est réel, l'exponentielle complexe est de module 1 et

$$\boxed{\mathbb{R} \cap \mathbb{S}^1 = \{1, -1\}.}$$

Donc la dernière égalité a lieu si et seulement si :

$$\boxed{-2\cos\frac{x-y}{2} = e^{-i\frac{x+y}{2}} = 1 \text{ ou } -2\cos\frac{x-y}{2} = e^{-i\frac{x+y}{2}} = -1.}$$

Pour simplifier la résolution on remarque que si (x, y) est solution alors $(x + 2k\pi, y + 2k'\pi)$ est aussi solution pour tout $k, k' \in \mathbb{Z}$; il suffit donc de rechercher les solutions telles que $x, y \in]-\pi, \pi]$; dans ce cas $\frac{x+y}{2} \in]-\pi, \pi]$ et $\frac{x-y}{2} \in]-\pi, \pi[$. On étudie alors les deux cas :

1.

$$\begin{aligned}
-2\cos\frac{x-y}{2} = e^{-i\frac{x+y}{2}} = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{x+y}{2} = \pi \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x-y}{2} = \pm\frac{\pi}{3} \text{ et } \frac{x+y}{2} = \pi
\end{aligned}$$

Après calculs on voit que ces deux systèmes linéaires (selon que $\pm$ est $+$ ou $-$) de deux équations à deux inconnues x et y n'ont pas de solution (x, y) telle que : $x, y \in]-\pi, \pi]$.

2.

$$\begin{aligned}
-2\cos\frac{x-y}{2} = e^{-i\frac{x+y}{2}} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos\frac{x-y}{2} = -\frac{1}{2} \text{ et } \frac{x+y}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x-y}{2} = \pm\frac{2\pi}{3} \text{ et } \frac{x+y}{2} = 0
\end{aligned}$$

Après calculs on trouve deux solutions :

$$(x, y) = \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right) \text{ et } (x, y) = \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right).$$

En conclusion l'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{\left\{ \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi\right) \middle| k, k' \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi\right) \middle| k, k' \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

Autre méthode : on commence de même et on écrit que :

$$1 + e^{ix} + e^{iy} = 0$$

signifie que :

$$\sin x + \sin y = 0 \text{ et } \cos x + \cos y + 1 = 0.$$

La première équation donne que $x = -y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi$. en remplaçant x par cette valeur dans la deuxième équation on trouve $\cos y$ puis y.

SOLUTION DU PROBLÈME 4.85

1. **$\mathbb{H}$ est stable par somme :**
   En utilisant les propriétés de la conjugaison complexe, on calcule :
   $$Q_{a,b} + Q_{c,d} = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -\overline{d} \\ d & \overline{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -\overline{b+d} \\ b+d & \overline{a+c} \end{pmatrix} = Q_{a+c,b+d},$$
   ce qui prouve le résultat annoncé.
2. **$\mathbb{H}$ est stable par produit par un scalaire réel :**
   Pour λ réel on a :
   $$\lambda Q_{a,b} = \lambda \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & -\overline{\lambda b} \\ \lambda b & \overline{\lambda a} \end{pmatrix} = Q_{\lambda a, \lambda b},$$
   ce qui prouve le résultat annoncé.

   $\mathbb{H}$ n'est pas stable par produit par un scalaire complexe :
   Par contre si λ est complexe non réel, on n'a pas en général : $\lambda\overline{a} = \overline{\lambda a}$. Par exemple :
   $$iQ_{1,0} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
   n'est pas de la forme $Q_{a,b}$ car $i \neq \overline{i}$. En conclusion, $\boxed{\text{pour } \lambda \text{ complexe il est faux, en général, que } \lambda Q_{a,b} \in \mathbb{H}.}$
   Remarque : on notera bien qu'il est inexact de dire que :
   $$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall Q \in \mathbb{H},\ \lambda Q \notin \mathbb{H}.$$
   (penser à prendre $\lambda \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ou $Q = 0$).
3. **$\mathbb{H}$ est stable par produit :**
   (a) **Table de multiplication de I, J, K, L :**
   Les calculs donnent :

	I	J	K	L
I	I	J	K	L
J	J	$-I$	$-L$	K
K	K	L	$-I$	$-J$
L	L	$-K$	J	$-I$

   (b) **Expression des éléments de $\mathbb{H}$ sous la forme $tI + xJ + yK + zL$:**
   On voit que :
   $$tI + xJ + yK + zL = \begin{pmatrix} t+iz & -x+iy \\ x+iy & t-iz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+iz & -\overline{x+iy} \\ x+iy & \overline{t+iz} \end{pmatrix} = Q_{t+iz,x+iy}.$$
   Ainsi, inversement on a :
   $$\boxed{Q_{a,b} = \mathrm{Re}\,(a)I + \mathrm{Re}\,(b)J + \mathrm{Im}\,(b)K + \mathrm{Im}\,(a)L,}$$
   ce qui prouve le résultat.

(c) **Calcul de $(tI+xJ+yK+zL)(t'I+x'J+y'K+z'L)$:**
En utilisant la bilinéarité du produit on développe :

$$\begin{aligned}
& (tI+xJ+yK+zL)(t'I+x'J+y'K+z'L) \\
= \ & tt'I+tx'J+ty'K+tz'L+xt'J+xx'J^2+xy'JK+xz'JL \\
& +yt'K+yx'KJ+yy'K^2+yz'KL+zt'L+zx'LJ+zy'LK+zz'L^2 \\
= \ & (tt'-xx'-yy'-zz')I+(tx'+xt'-yz'+zy')J+(ty'+xz'+yt'-zx')K+(tz'-xy'+yx'+zt')L
\end{aligned}$$

Ce résultat est de la forme $t''I+x''J+y''K+z''L$, avec $t'',x'',y'',z''\in\mathbb{R}$, donc d'après la question précédente, c'est un élément de $\mathbb{H}$.

(d) **Conclusion :**
D'après la question 3b, deux éléments quelconques $Q,Q'\in\mathbb{H}$ s'écrivent sous la forme

$$Q=tI+xJ+yK+zL \text{ et } Q'=t'I+x'J+y'K+z'L.$$

D'après la question précédente QQ' est alors un élément de $\mathbb{H}$. On donc a bien montré que le produit de deux éléments de $\mathbb{H}$ est un élément de $\mathbb{H}$.

(e) **Le produit dans $\mathbb{H}$ n'est pas commutatif :**
En effet on a vu que $JK\neq KJ$.
Remarque : il est par contre faux que :

$$\forall Q,Q'\in\mathbb{H},\ QQ'\neq Q'Q.$$

(prendre $Q=I$!).

4. **Calcul de $Q_{a,b}Q_{\overline{a},-b}$:**
On a :

$$\begin{aligned}
Q_{a,b}Q_{\overline{a},-b} &= \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\overline{a}+b\overline{b} & 0 \\ 0 & a\overline{a}+b\overline{b}\end{pmatrix} \\
&= \left(|a|^2+|b|^2\right)I.
\end{aligned}$$

Soit en conclusion $\boxed{Q_{a,b}Q_{\overline{a},-b}=\left(|a|^2+|b|^2\right)I.}$

5. **Inversibilité et inverse des matrices non nulles de $\mathbb{H}$:**
On remarque que $Q_{a,b}$ est non nulle si et seulement si $(a,b)\neq(0,0)$. Dans ce cas $|a|^2+|b|^2$ est non nul, donc, d'après la question précédente, on a :

$$Q_{a,b}\left(\frac{1}{|a|^2+|b|^2}Q_{\overline{a},-b}\right)=I,$$

ce qui prouve que $\boxed{Q_{a,b} \text{ est inversible d'inverse } \frac{1}{|a|^2+|b|^2}Q_{\overline{a},-b}.}$

6. **Résolution du système linéaire :**
Rappelons que, pour des nombres réels X,Y,A,B on a :

$$\begin{cases} X=A \\ Y=B\end{cases} \Leftrightarrow X+iY=A+iB.$$

Ainsi

$$\left\{\begin{array}{ll} mt-2x-3y-(m+1)z & =-4-m \\ 2t+mx+(m+1)y-3z & =m-2 \\ 3t-(m+1)x+my+2z & =2+m \\ (m+1)t+3x-2y+mz & =-2+m. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} (mt-2x-3y-(m+1)z)+i(2t+mx+(m+1)y-3z) & = & (-4-m)+i(m-2) \\ (3t-(m+1)x+my+2z)+i((m+1)t+3x-2y+mz) & = & (2+m)+i(-2+m) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t(m+2i)+x(-2+im)+y(-3+i(m+1))+z(-(m+1)-3i) & = & (-4-m)+i(m-2) \\ t(3+i(m+1))+x(-(m+1)+3i)+y(m-2i)+z(2+mi) & = & (2+m)+i(-2+m) \end{array}\right.$$

Pour profiter des symétries des coefficients on écrit plutôt :

$$\left\{\begin{array}{lcl} t(m+2i)+xi(2i+m)+y(-3+i(m+1))+zi(i(m+1)-3) & = & (-4-m)+i(m-2) \\ t(3+i(m+1))+xi(i(m+1)+3)+y(m-2i)+zi(-2i+m) & = & (2+m)+i(-2+m) \end{array}\right. ,$$

soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (t+ix)(m+2i)+(y+iz)(-3+i(m+1)) & = & (-4-m)+i(m-2) \\ (t+ix)(3+i(m+1))+(y+iz)(m-2i) & = & (2+m)+i(-2+m) \end{array}\right. ,$$

soit

$$Q_{m+2i,3+i(m+1)}\begin{pmatrix} t+ix \\ y+iz \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-4-m)+i(m-2) \\ (2+m)+i(-2+m) \end{pmatrix}.$$

Comme $m+2i$ et $3+i(m+1)$ sont des nombres complexes non nuls, d'après la question précédente, la matrice $Q_{m+2i,3+i(m+1)}$ est inversible d'inverse $\frac{1}{m^2+2^2+3^3+(m+1)^2}Q_{m-2i,-3-i(m+1)}$. Le système a donc une seule solution donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} t+ix \\ y+iz \end{pmatrix} & = & \frac{1}{m^2+2^2+3^3+(m+1)^2}Q_{m-2i,-3-i(m+1)}\begin{pmatrix} (-4-m)+i(m-2) \\ (2+m)+i(-2+m) \end{pmatrix} \\ & = & \frac{1}{m^2+2^2+3^3+(m+1)^2}\begin{pmatrix} (m-2i)((-4-m)+i(m-2))+(3-i(m+1))((2+m)+i(-2+m)) \\ (-3-i(m+1))((-4-m)+i(m-2))+(m+2i)((2+m)+i(-2+m)) \end{pmatrix} \\ & \vdots & \text{[calculs]} \\ & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \end{array}$$

On trouve donc $\boxed{\text{une unique solution } (t,x,y,z)=(0,0,1,1).}$

7. **Relation $Q_{a,b}\wedge Q_{a',b'}=-Q_{a',b'}\wedge Q_{a,b}$:**
La relation à montrer s'écrit :

$$Q_{a,b}\wedge Q_{a',b'}+Q_{a',b'}\wedge Q_{a,b}=0,$$

soit, compte-tenu de la définition de l'opération $\wedge$:

$$Q_{a,b}Q_{a',b'}+Q_{a',b'}Q_{a,b}-2\left(aa'-\mathrm{Re}\left(b\overline{b'}\right)\right)I=0.$$

On calcule alors :

$$\begin{array}{rcl} Q_{a,b}Q_{a',b'} & = & \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a'} & \overline{b'} \\ -b' & a' \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} aa'-b'\overline{b} & -a\overline{b'}-\overline{ba'} \\ a'b+b'\overline{a} & -b\overline{b'}+\overline{aa'} \end{pmatrix} \end{array}$$

On obtient $Q_{a',b'}Q_{a,b}$ en permutant a et a', b et b', d'où :

$$\begin{aligned} Q_{a,b}Q_{a',b'} + Q_{a',b'}Q_{a,b} &= \begin{pmatrix} aa' - b'\overline{b} & -a\overline{b'} - \overline{ba'} \\ a'b + b'\overline{a} & -b\overline{b'} + \overline{aa'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} aa' - b\overline{b'} & -a'\overline{b} - \overline{b'a} \\ ab' + b\overline{a'} & -b'\overline{b} + \overline{a'a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2aa' - b'\overline{b} - b\overline{b'} & -a\overline{b'} - \overline{ba'} - a'\overline{b} - \overline{b'a} \\ a'b + b'\overline{a} + ab' + b\overline{a'} & 2\overline{a'a} - b'\overline{b} - b\overline{b'} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or :

$$2aa' - b'\overline{b} - b\overline{b'} = 2aa' - (b\overline{b'} + \overline{b\overline{b'}}) = 2aa' - 2\mathrm{Re}\left(b\overline{b'}\right) \text{ d'après } 2\mathrm{Re}\,(z) = z + \overline{z}.$$

Et comme a et a' son imaginaires purs, on a : $\boxed{\overline{a} = -a}$ et $\boxed{\overline{a'} = -a'}$ d'où :

$$2\overline{a'}\overline{a} - b'\overline{b} - b\overline{b'} = 2aa' - 2\mathrm{Re}\left(b\overline{b'}\right).$$

De plus :

$$a'b + b'\overline{a} + ab' + b\overline{a'} = a'b - b'a + ab' - ba' = 0.$$
$$-a\overline{b'} - \overline{ba'} - a'\overline{b} - \overline{b'a} = -a\overline{b'} + \overline{b}a' - a'\overline{b} + \overline{b'}a = 0.$$

Ainsi :

$$Q_{a,b}Q_{a',b'} + Q_{a',b'}Q_{a,b} = \begin{pmatrix} 2aa' - 2\mathrm{Re}\left(b\overline{b'}\right) & 0 \\ 0 & 2aa' - 2\mathrm{Re}\left(b\overline{b'}\right) \end{pmatrix} = \left(2aa' - 2\mathrm{Re}\left(b\overline{b'}\right)\right) I,$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

SOLUTION DU PROBLÈME 4.86

1. **Domaine de définition de φ_A :**
   Il vaut

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}\,\varphi_A &= \{z \in \mathbb{C} \mid cz + d \neq 0\} \\ &= \begin{cases} \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} & \text{si } c \neq 0 \\ \mathbb{R} & \text{si } c = 0 \text{ et } d \neq 0 \\ \emptyset & \text{si } c = 0 \text{ et } d = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2. **Expression de φ_A :**
   On remarque que :

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{\beta}{cz+d} &= \frac{\alpha cz + d\alpha + \beta}{cz+d} \\ &= \frac{(\alpha c)z + (d\alpha + \beta)}{cz+d} \end{aligned}$$

Pour avoir

$$\varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \alpha + \frac{\beta}{cz+d},$$

il suffit donc que :

$$\begin{cases} \alpha c = a \\ d\alpha + \beta = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{a}{c} \\ \beta = b - d\alpha = \frac{bc-ad}{c} \end{cases},$$

soit $\boxed{\alpha = \frac{a}{c} \text{ et } \beta = \frac{bc-ad}{c}.}$

3. **Bijectivité de φ_A :**
On sait que A est inversible, si et seulement si $ad-bc\neq 0$, donc $\beta\neq 0$. Pour $z'\neq\alpha$, on a donc :

$$\begin{aligned} z'=\alpha+\frac{\beta}{cz+d} &\Leftrightarrow z'-\alpha=\frac{\beta}{cz+d}\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{z'-\alpha}=\frac{cz+d}{\beta} \text{ car } \beta\neq 0\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{c}\left(\frac{\beta}{z'-\alpha}-d\right)=z \text{ car } c\neq 0\end{aligned}$$

Ainsi, pour $z'\neq\alpha$ fixé, l'équation $z'=\varphi_A(z)$ a une unique solution z, donc φ_A est bijective de $\mathbb{C}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ sur $\mathbb{C}-\left\{\frac{a}{c}\right\}$.

4. **Bijectivité de $\varphi_{A^{-1}}$:**
On note $A^{-1}=\begin{pmatrix} a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}$; d'après la question précédente, on sait que, si $c'\neq 0$, alors $\varphi_{A^{-1}}$ est une bijection de $\mathbb{C}-\left\{-\frac{d'}{c'}\right\}$ sur $\mathbb{C}-\left\{\frac{a'}{c'}\right\}$. Or A est inversible si et seulement si $ad-bc\neq 0$ et alors :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}.$$

Donc $c'=\frac{-c}{ad-bc}$ est non nul puisque $c\neq 0$, par hypothèse. On calcule alors :

$$-\frac{d'}{c'}=-\frac{\frac{a}{ad-bc}}{\frac{-c}{ad-bc}}=\frac{a}{c} \quad\text{et}\quad \frac{a'}{c'}=\frac{\frac{d}{ad-bc}}{\frac{-c}{ad-bc}}=-\frac{d}{c}.$$

Ainsi $\boxed{\varphi_{A^{-1}} \text{ est bijective de } \mathbb{C}-\left\{\frac{a}{c}\right\} \text{ sur } \mathbb{C}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}.}$

5. **Calcul de $\varphi_B\circ\varphi_A$:**
On note toujours $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$; on note aussi $B=\begin{pmatrix} s & t\\ u & v\end{pmatrix}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \varphi_B(\varphi_A(z)) &= \varphi_B\left(\tfrac{az+b}{cz+d}\right)\\ &= \frac{s\frac{az+b}{cz+d}+t}{u\frac{az+b}{cz+d}+v}\\ u\tfrac{az+b}{cz+d}+v &= \frac{u(az+b)+v(cz+d)}{cz+d}\\ &= \frac{(ua+vc)z+(ub+vd)}{cz+d}\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} s & t\\ u & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} sa+tc & sb+td\\ ua+vc & ub+vd\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} sa+tc & sb+td\\ ua+vc & ub+vd\end{pmatrix}\\ \varphi_{BA}(z) &= \frac{(sa+tc)z+sb+td}{(ua+vc)z+ub+vd}.\end{aligned}$$

Or on sait que $\varphi_A(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ est défini et qu'il est dans le domaine de φ_B, c'est-à-dire que $u\frac{az+b}{cz+d}+v\neq 0$, ce qui entraîne, d'après les calculs précédents, que $(ua+vc)z+ub+vd\neq 0$, c'est-à-dire que $\varphi_{BA}(z)$ est défini.
On termine alors le calcul :

$$\begin{aligned}\varphi_B(\varphi_A(z)) &= \frac{s\frac{az+b}{cz+d}+t}{u\frac{az+b}{cz+d}+v}\\ &= \frac{\frac{s(az+b)+t(cz+d)}{cz+d}}{\frac{(ua+vc)z+(ub+vd)}{cz+d}}\\ &= \frac{(sa+tc)z+sb+td}{(ua+vc)z+ub+vd}\\ &= \varphi_{BA}(z).\end{aligned}$$

6. **Réciproque de φ_A :**
Remarquons que pour la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a :
$$\varphi_I(z) = \frac{1z+0}{0z+1} = z.$$
Par ailleurs si, dans la question précédente, on prend $B = A^{-1}$, alors les conditions $z \in \operatorname{dom}\varphi_A$ et $\varphi_A(z) \in \operatorname{dom}\varphi_{A^{-1}}$, soit $z \in \mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ et $\varphi_A(z) \in \mathbb{C} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$, se réduisent à $z \in \mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, puisque $\varphi_A(z) \in \mathbb{C} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$ est automatique d'après la question 3. Ainsi, pour $z \neq -\frac{d}{c}$, on a :
$$z = \varphi_I(z) = \varphi_{A^{-1}A}(z) = \varphi_{A^{-1}}(\varphi_A(z)).$$
Ainsi, comme $\varphi_{A^{-1}}$ et $\varphi_A(z)$ sont deux bijections, on déduit que $\boxed{\varphi_{A^{-1}} \text{ est la réciproque de } \varphi_A.}$

7. **Relation Im $(\varphi_A(z)) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}$Im (z). :**
On calcule :
$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(\varphi_A(z)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{(az+b)\overline{(cz+d)}}{|cz+d|^2}\right) \\
&= \frac{1}{|cz+d|^2}\operatorname{Im}\left((az+b)(c\overline{z}+d)\right) \text{ par linéarité de Im et } z \longmapsto \overline{z} \\
&= \frac{1}{|cz+d|^2}\operatorname{Im}\left(acz\overline{z}+adz+bc\overline{z}+bd\right) \\
&= \frac{1}{|cz+d|^2}(ac\operatorname{Im}(z\overline{z})+ad\operatorname{Im}(z)+bc\operatorname{Im}(\overline{z})+\operatorname{Im}(bd)) \text{ par linéarité de Im} \\
&= \frac{1}{|cz+d|^2}(ad-bc)\operatorname{Im}(z),
\end{aligned}$$
puisque
$$\operatorname{Im}(z\overline{z}) = 0; \operatorname{Im}(bd) = 0$$
car ce sont des nombres réels, et
$$\operatorname{Im}(\overline{z}) = -\operatorname{Im}(z).$$

8. **Condition pour que Im $\left(\frac{z+i}{iz+1}\right) > 0$:**
Un calcul analogue à celui de la question précédente donne :
$$\operatorname{Im}\left(\frac{z+i}{iz+1}\right) = \frac{1}{|iz+1|^2}(1-|z|^2).$$
Ainsi
$$\operatorname{Im}\left(\frac{z+i}{iz+1}\right) > 0 \Leftrightarrow 1-|z|^2 > 0 \Leftrightarrow |z|^2 < 1 \Leftrightarrow |z| < 1.$$

SOLUTION DU PROBLÈME 4.87

1. **Relation et calcul de λ :**
On a :
$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{(k+1)m\pi}{n+1}\right) + \sin\left(\frac{(k-1)m\pi}{n+1}\right) &= \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{(k+1)m\pi}{n+1}}\right) + \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{(k-1)m\pi}{n+1}}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{(k+1)m\pi}{n+1}} + e^{i\frac{(k-1)m\pi}{n+1}}\right),
\end{aligned}$$

d'après la linéarité de la fonction partie imaginaire Im. Par ailleurs on a

$$e^{i\theta}+e^{i\theta'}=e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}+e^{i\frac{\theta'-\theta}{2}}\right)=2e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right).$$

Avec $\theta=\frac{(k+1)m\pi}{n+1}$ et $\theta'=\frac{(k-1)m\pi}{n+1}$ on déduit

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{(k+1)m\pi}{n+1}\right)+\sin\left(\frac{(k-1)m\pi}{n+1}\right) &= \operatorname{Im}\left(2e^{i\frac{km\pi}{n+1}}\cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)\right)\\ &= 2\cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)\operatorname{Im}\left(2e^{i\frac{km\pi}{n+1}}\right)\\ &= 2\cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)\sin\left(\frac{km\pi}{n+1}\right).\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\boxed{\lambda=2}$.

2. **Existence et calcul de λ_m :**
Notons $w_1,\dots,w_n$ les coordonnées du vecteurs AV_m *i.e.*

$$AV_m=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix},$$

soit, par définition du produit de matrice :

$$\begin{cases}w_1 &= 2\sin\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)+(-1)\sin\left(\frac{2m\pi}{n+1}\right)\\ w_2 &= (-1)\sin\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)+2\sin\left(\frac{2m\pi}{n+1}\right)+(-1)\sin\left(\frac{3m\pi}{n+1}\right)\\ \vdots & \\ w_{n-1} &= (-1)\sin\left(\frac{(n-2)m\pi}{n+1}\right)+2\sin\left(\frac{(n-1)m\pi}{n+1}\right)+(-1)\sin\left(\frac{nm\pi}{n+1}\right)\\ w_n &= \sin\left(\frac{(n-1)m\pi}{n+1}\right)+2\sin\left(\frac{nm\pi}{n+1}\right)\end{cases}$$

Compte-tenu de ce que :

$$\sin\left(\frac{0m\pi}{n+1}\right)=0 \text{ et } \sin\left(\frac{(n+1)m\pi}{n+1}\right)=\sin(m\pi)=0,$$

pour $k=1,2,\cdots,n-1,n$ (c'est-à-dire, même pour 1 et n), on a :

$$\begin{aligned}w_k &= -\sin\left(\frac{(k-1)m\pi}{n+1}\right)+2\sin\left(\frac{km\pi}{n+1}\right)-\sin\left(\frac{(k+1)m\pi}{n+1}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{km\pi}{n+1}\right)-\left(\sin\left(\frac{(k-1)m\pi}{n+1}\right)+\sin\left(\frac{(k+1)m\pi}{n+1}\right)\right)\\ &= \sin\left(\frac{km\pi}{n+1}\right)\left(2-2\cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)\right) \text{ d'après la question (1)}\end{aligned}$$

Ainsi

$$AV_m=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}=\left(2-2\cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)\right)\begin{pmatrix}\sin\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)\\ \vdots\\ \sin\left(\frac{nm\pi}{n+1}\right)\end{pmatrix}=\left(2-2\cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)\right)V_m.$$

On a donc $AV_m=\lambda_mV_m$ avec $\boxed{\lambda_m=2-2\cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)}$.

3. **Relation $AP = PD$:**
On remarque que la matrice P a la décomposition par blocs suivante :

$$P = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_n \end{pmatrix}.$$

On fait alors le produit par blocs :

$$\begin{array}{rcl} AP & = & \begin{pmatrix} AV_1 & AV_2 & \cdots & AV_n \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \lambda_1 V_1 & \lambda_2 V_2 & \cdots & \lambda_n V_n \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \lambda_1 \sin\left(\frac{1\times 1\pi}{n+1}\right) & \lambda_2 \sin\left(\frac{1\times 2\pi}{n+1}\right) & \cdots & \lambda_n \sin\left(\frac{1\times n\pi}{n+1}\right) \\ \lambda_1 \sin\left(\frac{2\times 1\pi}{n+1}\right) & \lambda_2 \sin\left(\frac{2\times 2\pi}{n+1}\right) & \cdots & \lambda_n \sin\left(\frac{2\times n\pi}{n+1}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 \sin\left(\frac{n\times 1\pi}{n+1}\right) & \lambda_2 \sin\left(\frac{n\times 2\pi}{n+1}\right) & \cdots & \lambda_n \sin\left(\frac{n\times n\pi}{n+1}\right) \end{pmatrix} \end{array}$$

Par ailleurs on remarque aussi, en le calculant directement, que

$$\begin{array}{rcl} PD & = & \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{1\times 1\pi}{n+1}\right) & \sin\left(\frac{1\times 2\pi}{n+1}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{1\times n\pi}{n+1}\right) \\ \sin\left(\frac{2\times 1\pi}{n+1}\right) & \sin\left(\frac{2\times 2\pi}{n+1}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{2\times n\pi}{n+1}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin\left(\frac{n\times 1\pi}{n+1}\right) & \sin\left(\frac{n\times 2\pi}{n+1}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{n\times n\pi}{n+1}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \lambda_1 \sin\left(\frac{1\times 1\pi}{n+1}\right) & \lambda_2 \sin\left(\frac{1\times 2\pi}{n+1}\right) & \cdots & \lambda_n \sin\left(\frac{1\times n\pi}{n+1}\right) \\ \lambda_1 \sin\left(\frac{2\times 1\pi}{n+1}\right) & \lambda_2 \sin\left(\frac{2\times 2\pi}{n+1}\right) & \cdots & \lambda_n \sin\left(\frac{2\times n\pi}{n+1}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 \sin\left(\frac{n\times 1\pi}{n+1}\right) & \lambda_2 \sin\left(\frac{n\times 2\pi}{n+1}\right) & \cdots & \lambda_n \sin\left(\frac{n\times n\pi}{n+1}\right) \end{pmatrix}. \end{array}$$

D'où l'égalité

Relation $PA = DP$:
On remarque que les matrices A, P, D sont symétriques ce qui signifie :

$${}^tA = A,\ {}^tP = P,\ {}^tD = D.$$

On a donc :

$$PA = ({}^tP)({}^tA) =^t (AP) =^t (PD) = ({}^tD)({}^tP) = DP.$$

4. **Les λ_m sont distincts et non nuls :**
On remarque d'abord que, d'après la relation $\cos x = 1 - \sin^2 \frac{x}{2}$, les λ_m s'écrivent

$$\lambda_m = 2 - 2\cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right) = 4\sin^2 \frac{m\pi}{2(n+1)}$$

Alors, si m vérifie $1 \leqslant m \leqslant n+1$, on a :

$$0 < \frac{\pi}{2(n+1)} \leqslant \frac{m\pi}{2(n+1)} \leqslant \frac{n\pi}{2(n+1)} < \frac{(n+1)\pi}{2(n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Or la fonction $\sin^2$ est strictement positive et strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, donc les λ_m sont distincts non nuls.

Inversibilité et inverse de D :

On sait qu'une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses coefficients sont non nuls ; alors l'inverse est

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

5. **Calcul de P^2 :**

   (a) **Calcul des $q_{k,m}$:**
   On rappelle que pour deux matrices carrées $A = (a_{k,j})$ et $B = (b_{j,m})$ les coefficients $(c_{k,m})$ du produit $C = AB$ sont donnés par

   $$c_{k,m} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} b_{j,m}.$$

   Avec $A = B = P$, on trouve bien

   $$q_{k,m} = \sum_{j=1}^{n} p_{k,j} p_{j,m} = \sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{kj\pi}{n+1}\right) \sin\left(\frac{jm\pi}{n+1}\right).$$

   (b) **Calcul de $\sum_{j=1}^{n} \cos(2jt)$. :**
   On a :

   $$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \cos(2jt) &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re}\left(e^{i2jt}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} e^{i2jt}\right) \text{ (linéarité de Re)} \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i2t} - e^{i2(n+1)t}}{1 - e^{i2t}}\right) \text{ si } e^{i2t} \neq 1 \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+2)t}(e^{-int} - e^{int})}{e^{it}(e^{-it} - e^{it})}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(e^{i(n+1)t} \frac{\sin(-nt)}{\sin(-t)}\right) \\ &= \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \mathrm{Re}\left(e^{i(n+1)t}\right) \text{ (linéarité de Re)} \\ &= \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \cos((n+1)t). \end{aligned}$$

   Soit : $\boxed{\sum_{j=1}^{n} \cos(2jt) = \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \cos((n+1)t).}$ sauf si t multiple de π, auquel cas on trouve, directement $\sum_{j=1}^{n} \cos(2jt) = n$.

   (c) **Calcul de $\sum_{j=1}^{n} \sin(jx)\sin(jy)$. :**
   On a la relation trigonométrique classique :

   $$\sin(jx)\sin(jy) = \frac{1}{2}(\cos(j(x-y)) - \cos(j(x+y))).$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sin(jx)\sin(jy) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\cos(j(x-y))-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\cos(j(x+y))\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin(n\frac{x-y}{2})}{\sin(\frac{x-y}{2})}\cos\left((n+1)\frac{x-y}{2}\right)-\frac{1}{2}\frac{\sin(n\frac{x+y}{2})}{\sin(\frac{x+y}{2})}\cos\left((n+1)\frac{x+y}{2}\right),\end{aligned}$$

sauf si $\frac{x+y}{2}$ ou $\frac{x-y}{2}$ sont multiples de π.

(d) **Relation $P^2 = \frac{n+1}{2}I_n$:**

L'égalité de deux matrices est équivalente à l'égalité de leurs coefficients. Le résultat à montrer est donc :

$$q_{k,m} = \begin{cases}\frac{n+1}{2} & \text{si } k=m\\ 0 & \text{si } k\neq m\end{cases}.$$

En posant

$$x=\frac{k\pi}{n+1} \text{ et } y=\frac{m\pi}{n+1},$$

on a :

$$\frac{x+y}{2}=\frac{(k+m)\pi}{2(n+1)},\qquad \frac{x-y}{2}=\frac{(k-m)\pi}{2(n+1)}.$$

Comme k et m sont compris entre 1 et n, on a

$$2\leqslant k+m\leqslant 2n \text{ donc } 0<\frac{\pi}{(n+1)}\leqslant\frac{x+y}{2}\leqslant\frac{n\pi}{(n+1)}<\pi.$$

$$1-n\leqslant k-m\leqslant n-1 \text{ donc } -\pi<-\frac{(n-1)\pi}{2(n+1)}\leqslant\frac{x-y}{2}\leqslant\frac{(n-1)\pi}{2(n+1)}<\pi.$$

Donc $\frac{x+y}{2}$ n'est pas multiples de π et $\frac{x-y}{2}$ et non plus, sauf si $k=m$. D'après le résultat du (a), on a donc, pour $k\neq m$:

$$\begin{aligned}q_{k,m} &= \sum_{j=1}^{n}\sin(jx)\sin(jy)\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin(n\frac{x-y}{2})}{\sin(\frac{x-y}{2})}\cos\left((n+1)\frac{x-y}{2}\right)-\frac{1}{2}\frac{\sin(n\frac{x+y}{2})}{\sin(\frac{x+y}{2})}\cos\left((n+1)\frac{x+y}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin(n\frac{(k-m)\pi}{2(n+1)})}{\sin(\frac{(k-m)\pi}{2(n+1)})}\cos\left(\frac{(k-m)\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\frac{\sin(n\frac{(k+m)\pi}{2(n+1)})}{\sin(\frac{(k+m)\pi}{2(n+1)})}\cos\left(\frac{(k+m)\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Alors si k et m sont l'un pair et l'autre impair, $k+m$ et $k-m$ sont impairs donc

$$\cos\left(\frac{(k+m)\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{(k-m)\pi}{2}\right)=0,$$

d'où $q_{k,m}=0$. Un raisonnement analogue prouve que $q_{k,m}=0$ si k et m sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.

Pour le cas $k=m$ on calcule directement

$$\begin{aligned}q_{k,m} &= \sum_{j=1}^{n}\sin^2\left(\frac{jm\pi}{n+1}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2jm\pi}{n+1}\right)\right) \text{ d'après } \sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos^2 2x\\ &= \frac{n}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sin(n\frac{m\pi}{n+1})}{\sin(\frac{m\pi}{n+1})}\cos\left((n+1)\frac{m\pi}{n+1}\right) \text{ d'après la question (b)}\end{aligned}$$

Notons que
$$\cos(m\pi) = (-1)^m \text{ et } \sin(m\pi) = 0.$$
Alors, d'après
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha,$$
on a :
$$\sin\left(n\frac{m\pi}{n+1}\right) = \sin\left(m\pi - \frac{m\pi}{n+1}\right) = -(-1)^m \sin\left(\frac{m\pi}{n+1}\right),$$
d'où
$$q_{m,m} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}(-(-1)^m(-1)^m) = \frac{n+1}{2}.$$

6. **Calcul de $PD^{-1}PA$; inversibilité et inverse de A :**
D'après les question précédentes, on a :
$$PD^{-1}PA = PD^{-1}(PA) = PD^{-1}(DP) = PP = P^2 = \frac{n+1}{2}I_n.$$
Cette égalité s'écrit encore
$$\left(\frac{2}{n+1}PD^{-1}P\right)A = I_n \ ;$$
ainsi le produit de A avec une autre matrice vaut I_n, donc A est inversible, et $\boxed{A^{-1} = \frac{2}{n+1}PD^{-1}P}$.

Solutions des exercices du chapitre 5

Solution de l'exercice 5.1

$$P_{n+1} + P_n = X^{n+1}.$$

Solution de l'exercice 5.2

$$\begin{aligned}(2X^4 - X^3 + X^2 + X + 1)(X^2 - 3X + 1) &= 2X^6 - 7X^5 + 6X^4 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1\\ (X^3 + X^2 - X - 1)(X^2 - 2X - 1) &= X^5 - X^4 - 4X^3 + 3X + 1\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5.3

1. $P_{n+1} - P_n = (n+1)X^n R$.
2. On a :

$$\begin{aligned}P_n &= (P_n - P_{n-1}) + (P_{n-1} - P_{n-2}) + \cdots + (P_1 - P_0) + P_0\\ &= (P_n - P_{n-1}) + (P_{n-1} - P_{n-2}) + \cdots + (P_1 - P_0) \text{ car } P_0 = 0\\ &= nX^{n-1}R + (n-1)X^{n-2}R + \cdots + R\\ &= \underbrace{\left(nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + \cdots + 1\right)}_{=Q_n} R\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5.5

$$X^4 + a(a+X)(a+2X)(a+3X) = (X^2 + 3aX + a^2)^2.$$

Solution de l'exercice 5.6

$$P_n = \frac{n(n+1)}{2} X^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} kX^k.$$

Solution de l'exercice 5.7

On a :

$$\begin{aligned}(X-1)^2 \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1} &= (X^2 - 2X + 1) \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}\\ &= \sum_{k=1}^{n} kX^{k+1} - 2\sum_{k=1}^{n} kX^k + \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}\\ &= \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)X^k - 2\sum_{k=1}^{n} kX^k + \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k \quad \text{(changements d'indices)}\\ &= \left(\sum_{k=2}^{n-1} \left((k-1) - 2k + (k+1)\right) X^k\right) + ((n-1)X^n + nX^{n+1}) - 2(X + nX^n) + (1 + 2X)\\ &\quad \text{(regroupement des termes de même degré)}\\ &= nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5.8

Quand on effectue le produit la plupart des termes s'annulent entre eux (téléscopage). Il reste alors :

$$P_n = 2 - 3X + (-1 + 2^{n+1})X^{n+1} + 2(1 + 2^n)X^{n+2}.$$

Solution de l'exercice 5.9

1. **Relation** $(1 + X + \cdots + X^p)^2 = (p+1)X^p + \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)(X^k + X^{2p-k})$. **:**

 Montrons cette relation $\mathcal{R}(p)$ $\boxed{\text{par récurrence sur } p \geqslant 1 :}$
 - La relation $\mathcal{R}(1)$ signifie $(1 + X)^2 = 2X + 1 + X^2$; elle est donc vraie.
 - Si la relation $\mathcal{R}(p)$ est vraie :
 Remarquons d'abord que pour tout p on a la relation $\mathcal{S}(p)$ suivante :

$$\begin{aligned}(p+1)X^p + \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)(X^k + X^{2p-k}) &= (p+1)X^p + \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)X^k + \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)X^{2p-k} \\ &= (p+1)X^p + \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)X^k + \sum_{k'=p+1}^{2p}(2p+1-k')X^{k'},\end{aligned}$$

 en effectuant le changement de variable $k' = 2p - k$ dans la dernière somme. D'où :

$$\begin{aligned} & ((1 + X + \cdots + X^p) + X^{p+1})^2 \\ = \;& X^{2p+2} + 2X^{p+1}(1 + X + \cdots + X^p) + (1 + X + \cdots + X^p)^2 \\ = \;& X^{2p+2} + 2X^{p+1} + 2X^{p+2} + \cdots + 2X^{2p+1} + \left((p+1)X^p + \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)(X^k + X^{2p-k})\right) \quad \text{d'après } \mathcal{R}(p) \\ = \;& X^{2p+2} + \left(\sum_{k=p+1}^{2p} 2X^k\right) + 2X^{2p+1} + (p+1)X^p + \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)X^k + \sum_{k=p+1}^{2p}(2p+1-k)X^k \quad \text{d'après } \mathcal{S}(p) \\ = \;& \left\{\left(\sum_{k=p+1}^{2p}(2p+3-k)X^k\right) + 2X^{2p+1} + X^{2p+2}\right\} + \left\{\left(\sum_{k=0}^{p-1}(k+1)X^k\right) + (p+1)X^p\right\} \\ = \;& \left\{(p+2)X^{p+1} + \sum_{k=p+2}^{2p+2}(2p+3-k)X^k\right\} + \sum_{k=0}^{p}(k+1)X^k \\ = \;& (p+2)X^{p+1} + \sum_{k=0}^{p}(k+1)(X^k + X^{2p+2-k}) \quad \text{d'après } \mathcal{S}(p+1),\end{aligned}$$

 c'est-à-dire que $\mathcal{R}(p+1)$ est vraie.

2. **La fonction** $x \longmapsto \sqrt{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$ **estun polynôme réel :**

 En effet car d'après la question précédente :

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2$$

 or, pour tout x réel : $x^2 + x + 1 \geqslant 0$. Donc :

$$\sqrt{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x^2 + x + 1)^2} = |x^2 + x + 1| = x^2 + x + 1.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.12

1. Conjecturer et montrer par récurrence que : $P_n = X^{2^{n+1}} - 1$
3. $Q_n = X^{3^{n+1}} - 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.13

1. $P(Q) = X^4 - X^2 + 1$ et $Q(P) = 2X + 3X^2 + 2X^3 + X^4$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.14

D'après la formule du binôme : $P(X-1) = (X+1)^n - 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.15

1. $P = Q$ par le calcul.
2. $P = Q$, ou $P = X$, ou $Q = X$, ou P est constant et $Q(P) = P$, ou Q est constant et $P(Q) = Q$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.16

1. Calculer chaque membre et comparer.
2. Comme P et Q sont de degré 3 on peut les écrire :

$$Q = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \text{ et } P = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3.$$

Alors l'égalité trouvée à la question 1 donne :

$$\boxed{a_0 = -b_0^2,\ a_1 = b_1^2 - 2b_0b_2,\ a_2 = b_1b_3 - b_2^2,\ a_3 = b_3^2.}$$

3. On trouve $\boxed{Q = X^3 - 2X^2 + X - 4.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.17

1. **Existence $a_0, \dots, a_n$ et valeur de a_0, a_1 et a_n :**
Comme les polynômes $(1+\alpha X), \dots, (1+\alpha^n X)$ sont de degré au plus 1, et que le degré d'un produit est la somme des degrés, le polynôme produit $\boxed{P \text{ est de degré au plus } n,}$ donc il s'écrit comme combinaison linéaire des polynômes $1, X, \dots, X^n$.
On sait que le terme constant (respectivement le terme de plus haut degré) d'un produit est le produit des termes constants des facteurs (resp. le produit des termes de plus haut degré des facteurs). Donc :

$$\boxed{a_0 = 1 \text{ et } a_n = \prod_{k=1}^{n} \alpha^k = \alpha^{1+2+\dots+n} = \alpha^{\frac{n(n+1)}{2}}.}$$

Pour ce qui est de a_1, le calcul de P pour $n = 1, 2, 3$ nous suggère de montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ la relation :

$$\boxed{a_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k.}$$

– Pour $n = 1$ on a : $P = 1 + \alpha X$ d'où $a_1 = \alpha$.

– Si la relation est vraie à l'ordre n alors :

$$\begin{aligned}
P &= [(1+\alpha X)\dots(1+\alpha^n X)]\,(1+\alpha^{n+1}X) \\
&= \left(1+\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha^k\right)X+\dots+\alpha^{\frac{n(n+1)}{2}}X^n\right)(1+\alpha^{n+1}X) \\
&= 1+\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha^k+\alpha^{n+1}\right)X+\dots+\alpha^{\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)}X^{n+1}
\end{aligned}$$

Donc pour $n+1$ on a :

$$a_1=\sum_{k=1}^{n}\alpha^k+\alpha^{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\alpha^k,$$

donc la relation est vraie à l'ordre $n+1$.

2. **Relation $(1+\alpha X)P(\alpha X)=(1+\alpha^{n+1}X)P.$:**
En effet :

$$\begin{aligned}
(1+\alpha X)P(\alpha X) &= (1+\alpha X)\,[(1+\alpha(\alpha X))\dots(1+\alpha^n(\alpha X))] \\
&= (1+\alpha X)(1+\alpha^2X)\dots(1+\alpha^{n+1}X) \\
&= \big[(1+\alpha X)(1+\alpha^2X)\dots(1+\alpha^nX)\big]\,(1+\alpha^{n+1}X) \\
&= P\times(1+\alpha^{n+1}X)
\end{aligned}$$

3. **Relation entre a_p et a_{p+1} :**
Comme

$$P=a_0+a_1X+a_2X^2+\dots+a_nX^n,$$

on a :

$$\begin{aligned}
(1+\alpha^{n+1}X)P &= (1+\alpha^{n+1}X)(a_0+a_1X+a_2X^2+\dots+a_nX^n) \\
&= a_0+(a_1+\alpha^{n+1}a_0)X+(a_2+\alpha^{n+1}a_1)X^2+\dots+(a_n+\alpha^{n+1}a_{n-1})X^n+\alpha^{n+1}a_nX^{n+1} \\
(1+\alpha X)P(\alpha X) &= (1+\alpha X)(a_0+a_1\alpha X+a_2\alpha^2X^2+\dots+a_n\alpha^nX^n) \\
&= a_0+(a_0\alpha+a_1\alpha)X+(a_1\alpha^2+a_2\alpha^2)X^2+\dots+(a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^n)X^n+a_n\alpha^{n+1}X^{n+1}
\end{aligned}$$

Comme deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coefficients, d'après la question 2 on déduit que :

$$\begin{cases}
a_1+\alpha^{n+1}a_0=a_0\alpha+a_1\alpha \\
a_2+\alpha^{n+1}a_1=a_1\alpha^2+a_2\alpha^2 \\
\vdots \\
a_n+\alpha^{n+1}a_{n-1}=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^n
\end{cases}$$

Soit

$$a_1(1-\alpha)=a_0(\alpha-\alpha^{n+1}),\dots,a_n(1-\alpha^n)=a_{n-1}(\alpha^n-\alpha^{n+1}),$$

c'est-à-dire, étant donné que pour tout entier p, on a $1-\alpha^p\neq 0$, puisque $\alpha\notin\{1,-1\}$:

$$\boxed{\forall p\in\{1,\dots,n\},\quad a_p=\frac{\alpha^p-\alpha^{n+1}}{1-\alpha^p}a_{p-1}=\alpha^p\frac{1-\alpha^{n-p+1}}{1-\alpha^p}a_{p-1}.}$$

4. **Calcul de a_p :**
D'après les questions 1 et 3 la suite $(a_p)_{p\leqslant n}$ est donné par récurrence par :

$$a_0 = 1 \text{ et } a_p = a_p \times b_p \text{ avec } b_p = \alpha^p \frac{1-\alpha^{n-p+1}}{1-\alpha^p}.$$

Donc pour $p \in \{1,\dots,n\}$ on a :

$$\begin{aligned} a_p &= a_0 \prod_{k=1}^{p} b_k \\ &= \prod_{k=1}^{p} \alpha^k \frac{1-\alpha^{n-k+1}}{1-\alpha^k} \\ &= \left(\prod_{k=1}^{p} \alpha^k\right)\left(\prod_{k=1}^{p} \frac{1-\alpha^{n-k+1}}{1-\alpha^k}\right) \\ &= \alpha^{\frac{p(p+1)}{2}}\left(\prod_{k=1}^{p} \frac{1-\alpha^{n-k+1}}{1-\alpha^k}\right) \end{aligned}$$

soit, pour $p \geqslant 1$:

$$\boxed{a_p = \alpha^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{(\alpha^n-1)(\alpha^{n-1}-1)\cdots(\alpha^{n-p+1}-1)}{(\alpha-1)(\alpha^2-1)\cdots(\alpha^p-1)}.}$$

5. **Cas où $\alpha = 1$:**
On ne peut plus diviser par $\alpha^p - 1$, mais on peut calculer P directement par la formule du binôme :

$$P = (1+X)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p X^p,$$

d'où

$$\boxed{a_p = C_n^p.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.18

2. Il y a un seul polynôme solution :

$$P = -\frac{11}{6}X^4 - \frac{1}{2}X^3 + \frac{22}{3}X^2 - 1.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.20

1. Par résolution d'un système linéaire (échelonné) à cinq inconnues on trouve

$$P = \frac{1}{4}X^4 - \frac{3}{2}X^3 + \frac{11}{4}X^2 - \frac{3}{2}X,$$

(ou tout polynôme égal à P à une constante près).

2. La somme vaut, par télescopage :

$$S = \sum_{k=1}^{n} P(k+1) - P(k) = P(n+1) - P(1) = \frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{3}{2}(n+1)^3 + \frac{11}{4}(n+1)^2 - \frac{3}{2}(n+1).$$

Solution de l'exercice 5.21

1. On voit que :
   - Si $a^3 - a \neq 0$, soit $\boxed{a \notin \{0, 1, -1\}}$ alors $\boxed{\deg P = 3.}$
   - Si $a = 0$ et $b^2 + 1 \neq 0$, ou $a = 1$ et $b^2 - b + 1 \neq 0$, ou $a = -1$ et $b^2 + b + 1 \neq 0$ alors $\boxed{P \text{ est de degré 2.}}$ Après calculs ces diverses conditions donnent :

$$\boxed{a \in \{0, 1, -1\} \text{ et}}$$

$$\boxed{(a, b) \notin \underbrace{\left\{(0, i), (0 - i), \left(1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}}_{=D}.}$$

   - Si $\boxed{(a, b) \in D}$ et $ac + bc \neq 0$ alors $\boxed{\deg P = 1.}$ La condition $ac + bc \neq 0$ est équivalente à $c \neq 0$ et $a + b \neq 0$. On vérifie facilement que $a + b \neq 0$ lorsque $(a, b) \in D$, donc cette condition se ramène à $\boxed{c \neq 0}$
   - Si $\boxed{(a, b) \in D \text{ et } c = 0}$ alors $\boxed{P = 1 \text{ est de degré 0.}}$

Solution de l'exercice 5.23

Montrer par récurrence sur n que :

$$\deg P(X + a) - P = n - 1$$

Solution de l'exercice 5.24

1. $P_2 = 2X^2 - 1$, $P_3 = 4X^3 - 3X$, $P_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.
2. La question précédente permet de conjecturer la relation : $\boxed{\deg(P_n) = n.}$ On la montre $\boxed{\text{par récurrence}}$ en utilisant les formules donnant le degré d'une somme de termes de degré différents, et le degré d'un produit.
3. On montre $\boxed{\text{par récurrence}}$ que le coefficient de plus hait degré vaut 2^{n-1} pour $n \geqslant 1$.
4. $\boxed{\text{Par récurrence}}$ en utilisant les formules de trigonométrie.

Solution de l'exercice 5.25

1. **Calcul du degré :**
   Si d_n est le degré de P_n alors on a les relations :

$$d_0 = 0,\ d_1 = 1 \text{ et } d_{n+2} = 3d_{n+1} + 4d_n.$$

   On a affaire à une suite d'entiers vérifiant une relation de récurrece linéaire d'ordre 2. Le calcul donne alors :

$$\boxed{d_n = \deg(P_n) = \frac{4^n - 1}{3}.}$$

2. **Calcul du terme de plus haut degré :**
   Le calcul des premiers polynômes P_n permet de conjecturer puis de montrer par un récurrence évident que les P_n sont de la forme :

$$P_n = 2^{\alpha_n}(X + 1)^{d_n}.$$

La relation de récurrence montre qu'alors on a :

$$\alpha_0 = -1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} - \alpha_n,$$

d'où

$$\alpha_n = \frac{4(-1)^n + 4^n}{5}.$$

Ainsi le terme de plsu haut degré de P_n est

$$\boxed{2^{\frac{4(-1)^n+4^n}{5}} X^{\frac{4^n-1}{3}}.}$$

Solution de l'exercice 5.26

Le calcul des premiers polynômes permet de conjecturer qu'ils sont de la forme :

$$P_n = a_n X^n \text{ avec } a_n \in \mathbb{R}.$$

On le montre par récurrence sur n, et on trouve de plus que :

$$a_0 = \frac{1}{2},\ a_1 = 1 \text{ et } a_{n+2} = a_{n+1} - a_n.$$

On a affaire à une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Le calcul donne alors :

$$a_n = \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{3}\right).$$

D'où :

$$\boxed{P_n = \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{3}\right) X^n.}$$

Solution de l'exercice 5.27

1. **Calcul de P_2 :**

$$\begin{aligned}
P_2 &= XP_1(Q) + 2QP_1 \\
&= X\left(Q^2 - Q + 1\right) + 2Q(X^2 - X + 1) \\
&= XQ^2 + 2X^2Q - 3XQ + 2Q + X \\
&= X(X^3 - X)^2 + 2X^2(X^3 - X) - 3X(X^3 - X) + 2(X^3 - X) + X \\
&= X^7 - 2X^5 + X^3 + 2X^5 - 2X^3 - 3X^4 + 3X^2 + 2X^3 - 2X + X \\
&= X^7 - 3X^4 + X^3 + 3X^2 - X
\end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{P_2 = X^7 - 3X^4 + X^3 + 3X^2 - X.}$

2. **Degrés de P_2 et P_3 :**

D'après la question précédente $\boxed{\text{le degré de } P_2 \text{ vaut } 7.}$ Et P_3 est donné par :

$$P_3 = XP_2(Q) + 2QP_2.$$

D'après les formules de calcul du degré d'un produit ou d'un composée, on a :

$$\deg 2QP_2 = \deg QP_2 = \deg Q + \deg P_2 = 3 + 7 = 10.$$

Et :

$$\deg XP_2(Q) = \deg X + \deg P_2(Q) = 1 + \deg P_2 \deg Q = 1 + 7 \times 3 = 22.$$

Enfin on sait que le degré de la somme de deux polynômes de degrés différents est égal au plus haut des degré. On déduit donc que : $\boxed{\deg P_3 = 22.}$

3. **Degré de P_n :**

Recherche du résultat : notons d_n le degré de P_n. On a vu que $d_1 = 2, d_2 = 7, d_3 = 22$. En raisonnant comme à la question précédente, la relation :

$$P_{n+1} = XP_n(Q) + 2QP_n,$$

permet de calculer d_{n+1} en fonction de d_n. En effet :

$$\deg XP_n(Q) = 1 + 3d_n \text{ et } \deg 2QP_n = d_n + 3.$$

Or $1 + 3d_n > d_n + 3$, dès que $d_n > 1$, et si on regarde les premiers termes il semble clair que $d_n \geqslant 2$, on aura donc $d_{n+1} = 1 + 3d_n$. Ainsi (d_n) est une suite arithmético-géométrique dont on sait calculer le terme général en fonction de n.

Rédaction du résultat : montrons $\boxed{\text{par récurrence}}$ sur $n \geqslant 2$ la relation :

$$\boxed{d_n = 1 + 3d_{n-1} \text{ et } d_n \geqslant 2.}$$

– Elle est vraie pour $n = 2$ car $d_2 = 7 = 3d_1 + 1 \geqslant 2$, puisque $d_1 = 2$.

– Si elle est vraie à l'ordre n alors, d'après le raisonnement précédent :

$$\deg XP_n(Q) = 1 + 3d_n \text{ et } \deg 2QP_n = d_n + 3.$$

Et $1 + 3d_n > d_n + 3$ puisque $d_n \geqslant 2$, donc :

$$d_{n+1} = \deg P_{n+1} = \deg XP_n(Q) + 2QP_n = 1 + 3d_n.$$

Comme $d_n \geqslant 2$ on déduit tout de suite :

$$d_{n+1} = 1 + 3d_n \geqslant 7 \geqslant 2.$$

Donc la relation est vraie à l'ordre $n + 1$

On calcule alors d_n en fonction de n ; on trouve :

$$\boxed{d_n = -\frac{1}{2} + 3^{n-1}\left(d_1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}3^{n-1}.}$$

4. **Coefficient de plus haut degré de P_n :**

Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $\boxed{\text{le coefficient dominant de } P_n \text{ vaut 1 :}}$

– C'est vrai pour $n = 1$ car $P_1 = X^2 - X + 1$.

– Si c'est vrai à l'ordre n, on a vu que

$$P_{n+1} = XP_n(Q) + 2QP_n,$$

et que $2QP_n$ était de degré strictement inférieur à celui de $XP_n(Q)$. Le coefficient dominant de P_{n+1} est donc celui de $XP_n(Q)$, donc de $P_n(Q)$.

Par hypothèse de récurrence P_n s'écrit :

$$P_n = X^{d_n} + a_{d_n-1}X^{d_n-1} + \cdots + a_0,$$

donc :

$$P_n(Q) = Q^{d_n} + a_{d_n-1}Q^{d_n-1} + \cdots + a_0.$$

Les monômes qui apparaissent sont tous de degré strictement inférieur à $3d_n$ sauf Q^{d_n}. Donc le coeffient de plus haut degré de $P_n(Q)$ est le même que celui de $Q^{d_n} = (X^3 - X)^{d_n}$. En développant par la formule du binôme il apparait que le terme de plus haut degré de $(X^3 - X)^{d_n}$ est X^{3d_n}. Donc le coefficient dominant vaut 1. En conclusion le coefficient dominant de P_{n+1} vaut 1 aussi.

Solution de l'exercice 5.28

1. Comme : $P^2 - Q^2 = (P-Q)(P+Q)$, est constant non nul, on a :
$$\deg(P-Q) + \deg(P+Q) = \deg(P^2 - Q^2) = 0,$$
donc, comme le degré est un entier positif : $\deg(P-Q) = \deg(P+Q) = 0$. Ainsi $P-Q$ et $P+Q$ sont constants. Il en est donc de même de
$$P = \frac{1}{2}\left((P+Q)+(P-Q)\right) \text{ et } Q = \frac{1}{2}\left((P+Q)-(P-Q)\right).$$

2. Comme $f^2 - P^2 = 1$ est une fonction constante non nulle, si f était polynomiale, d'après la question 1, P et f seraient constants, ce qui est absurde puisqu'on a supposé P non constant.

Solution de l'exercice 5.29

1. **Si $P^2 - XQ^2 = XR^2$ alors $P = Q = R = 0$:**
On constate que $\boxed{\deg(Q^2+R^2) \text{ est pair}}$ puisque :
– <u>Si $\deg Q > \deg R$:</u> alors $\deg Q^2 = 2\deg Q > 2\deg Q = \deg Q^2$,
Donc d'après les règles de calcul du degré d'une somme de polynômes :
$$\deg(Q^2+R^2) = \deg Q^2 = 2\deg Q,$$
qui est pair
– <u>Si $\deg R > \deg Q$:</u> alors, de même, $\deg(Q^2+R^2) = 2\deg R$ est pair.
– <u>Si $\deg R = \deg Q$:</u> alors en écrivant Q et R en puissances de X on a :
$$Q = a_0 + a_1X \cdots + a_{n-1}X + a_nX^n \text{ et } R = b_0 + b_1X \cdots + b_{n-1}X + b_nX^n \text{ avec } a_n, b_n \neq 0.$$
Donc :
$$Q^2 = a_0^2 + 2a_0a_1X \cdots + 2a_{n-1}a_nX^{2n-1} + a_n^2X^{2n} \text{ et } R^2 = b_0^2 + 2b_0b_1X \cdots + 2b_{n-1}b_nX^{2n-1} + b_n^2X^{2n}.$$
Ainsi
$$Q^2 + R^2 = (a_0^2 + b_0^2) + \cdots + (a_n^2 + b_n^2)X^{2n}.$$
Comme a_n et b_n sont $\boxed{\text{réels}}$ et non nuls on déduit que $a_n^2 + b_n^2 \neq 0$, donc $\deg(Q^2+R^2) = 2n$ est pair.
Or la relation $P^2 - XQ^2 = XR^2$ s'écrit aussi : $P^2 = X(Q^2+R^2)$.
Et donc : $2\deg P = 1 + \deg(Q^2+R^2)$
Or ceci est $\boxed{\text{impossible}}$ puisque, d'après la remarque préliminaire, $1 + \deg(Q^2+R^2)$ est impair, alors que $2\deg P$ est pair. La seule possibilité est donc que P^2 et $X(Q^2+R^2)$ n'ait pas de degré *i.e.* soient nuls :
$$P^2 = X(Q^2+R^2) = 0.$$
Comme un produit de polynômes est nul si et seulement l'un des facteurs est nul on obtient :
$$P = 0 \text{ et } Q^2 + R^2 = 0.$$
Or pour deux fonctions $\boxed{\text{à valeurs réelles}}$ on a : $Q^2 + R^2 = 0 \Rightarrow Q = R = 0$.
Donc finalement $\boxed{P = Q = R = 0.}$
N.B. : ce résultat est faux pour des polynômes complexes, par exemple avec :
$$P = 0,\ Q = iX \text{ et } R = X.$$

Solution de l'exercice 5.31

Les solutions sont toutes de la forme :

$$\boxed{P = X^n \text{ avec } n \in \mathbb{N} \text{ ou } P = 0.}$$

Solution de l'exercice 5.31

Soit n le degré de P ; comparer les termes de degré n de $(X+3)P$ et de $XP(X+1)$. En déduire que $n = 3$. Puis résoudre un système linéaire pour trouver tous les coefficients de P

Solution de l'exercice 5.33

Prendre $y = x$ et regarder les degrés des polynômes obtenus. On obtient que $\boxed{P = 0}$ dans les deux cas.

Solution de l'exercice 5.35

Chacune des quatre conditions demandées sur P se ramène à une équation linéaire dont les inconnues sont les coefficients de P. Pour qu'un système linéaire de quatre équations ait une solution, en général, il suffit qu'il ait quatre inconnues. Il est donc naturel de chercher P de degré trois au plus :

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d.$$

On a alors, par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rl} P(1) & = \frac{31}{5} \\ P'(0) & = 1 \\ P''(0) & = 4 \\ P(-1) & = -\frac{9}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrll} a & +b & +c & +d & = \frac{31}{5} & L_1 \\ & & c & & = 1 & L_2 \\ & 2b & & & = 4 & L_3 \\ -a & +b & -c & +d & = -\frac{9}{5} & L_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrll} a & +b & +c & +d & = \frac{31}{5} & L_1 \\ & 2b & & & = 4 & L_3 \\ & 2b & & +2d & = \frac{22}{5} & L_4 + L_1 = L_4' \\ & & c & & = 1 & L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrll} a & +b & +c & +d & = \frac{31}{5} & L_1 \\ & 2b & & & = 4 & L_3 \\ & & c & & = 1 & L_2 \\ & & & +2d & = \frac{2}{5} & L_4' - L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} a & = 3 \\ b & = 2 \\ c & = 1 \\ d & = \frac{1}{5} \end{array}\right.$$

On trouve donc une solution $\boxed{P = 3X^3 + 2X^2 + X + \frac{1}{5}.}$ Il y en a d'autres de degré supérieur à 4.

Solution de l'exercice 5.36

1. Écrire P sous la forme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et trouver a, b, c, d en résolvant un système linéaire.
2. **Polynômes tels que $P(2X) = P'P''$:**
   Si P est de degré n alors $P(2X) = P'P''$ donne :

   $$n \times 1 = (n-1) + (n-2) \Leftrightarrow n = 3.$$

   On cherche P sous la forme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0$.
   L'équation $P(2X) = P'P''$ se ramène alors à un système d'inconnues a, b, c, d dont les solutions sont :

   $$(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0) \text{ ou } (a, b, c, d) = \left(\frac{4}{9}, 0, 0, 0\right).$$

   Comme $a \neq 0$. La seule solution est $\boxed{P = \frac{4}{9}X^3.}$

   Cepedant cette résolution présuppose que P, P', P'' ont un dégré (*i.e.* sont non nuls) pour cela il faut et il suffit que $P'' \neq 0$. Ainsi il faut étudier à part le cas où $P'' = 0$; dans ce cas $P(2X) = P'P'' = 0$, donc $\boxed{P = 0}$ est une autre solution.

3. Montrer que P est de degré 3 en comparant les termes de plus haut degré de $6P$ et de $(X^2+1)P''$, puis déterminer P en résolvant un système linéaire.
4. Montrer que P est de degré 2 au plus en comparant les termes de plus haut degré de $2P$ et $(X-1)P'-1$, puis déterminer P en résolvant un système linéaire. On trouve :

$$\boxed{P = \left(\frac{1+2a_0}{2}\right)X^2 - (1+2a_0)X + a_0, \text{ avec } a_0 \in \mathbb{K}.}$$

6. Montrer que P est de degré au plus 1.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.38

On calcule les premiers polynômes P_n :

$$\begin{array}{rcl} P_1 & = & X \\ P_2 & = & (X^2P_1)' = (X^3)' = 3X^2 \\ P_3 & = & (X^2P_2)' = (3X^4)' = 12X^3 \\ P_4 & = & (X^2P_3)' = (12X^5) = 60X^4 \end{array}$$

Ceci suggère de montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ la relation :

$$\exists a_n \in \mathbb{K},\ P_n = a_nX^n.$$

– On a vu avant que cette relation est vraie pour $n=1$ (et 2,3,4) en prenant $a_1 = 1$ (et $a_2 = 3$, $a_3 = 12$, et $a_4 = 60$).
– Si cette relation est vraie à l'ordre n alors

$$P_{n+1} = (X^2P_n)' = (a_nX^{n+2})' = (n+2)a_nX^{n+1}.$$

Donc la relation est vraie à l'ordre $n+1$ à condition de prendre $\boxed{a_{n+1} = (n+2)a_n.}$

Il suffit alors de calculer a_n en fonction de n. Or on vient de voir que

$$a_1 = 1 \text{ et } a_n = (n+1)a_{n-1},$$

donc pour tout n :

$$a_n = a_1\prod_{k=2}^{n}(k+1) = \frac{(n+1)!}{2}.$$

Donc finalement

$$\boxed{P_n = \frac{(n+1)!}{2}X^n.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.39

1. Faire une démonstration par récurrence sur n en utilisant que : $P_n'(-X) = -(P_n(-X))'$.
2. On peut montrer par récurrence que terme de plus haut degré est $\boxed{n!X^n.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.43

D'après la formule de Taylor tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 s'écrit :

$$P = P(2) + P'(2)(X-2) + \frac{P''(2)}{2}(X-2)^2 + \frac{P'''(2)}{6}(X-2)^3.$$

Donc les données de l'énoncé fournissent un seul polynôme *i.e.* :

$$P = 5 + 10(X-2) + \frac{9}{2}(X-2)^2 + (X-2)^3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + 4X - 5.$$

Solution de l'exercice 5.44

Procéder comme à l'exercice précédente pour déterminer P'. Puis en déduire P

Solution de l'exercice 5.46

La formule de Taylor en $x_0 = 1$ donne :

$$P = -10 - \frac{8}{1!}(X-1) + \frac{18}{3!}(X-1)^3 + \frac{24}{4!}(X-1)^4.$$

D'où :

$$\boxed{P\left(1+\sqrt[3]{2}\right) = -4 - 6\sqrt[3]{2}.}$$

Solution de l'exercice 5.49

2. On a :

$$\begin{aligned}
P(x_0) &= x_0^2\left(2x_0^2 + 3x_0 - 1 - \frac{3}{x_0} + \frac{2}{x_0^2}\right)\\
&= x_0^2\left(2\left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}\right) + 3\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) - 1\right)\\
\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)^2 &= \left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}\right) + 2\\
\text{donc } P(x_0) &= x_0^2\left(2\left(\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)^2 - 2\right) + 3\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) - 1\right)
\end{aligned}$$

On peut donc prendre $Q = 2(X^2-2) + 3X - 1 = 2X^2 + 3X - 5$.

3. Les racines de Q sont 1 et $-\frac{5}{2}$ Or :

$$x_0 + \frac{1}{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x_0 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

et

$$x_0 + \frac{1}{x_0} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x_0^2 + \frac{5}{2}x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2 \text{ ou } x_0 = -\frac{1}{2}$$

On déduit que P a quatre racines $\boxed{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.}$

Solution de l'exercice 5.50

$$X^3 - (2a+b)X^2 + a(a+2b)X - a^2b = (X-b)(X^2 - 2aX + a^2).$$

Solution de l'exercice 5.51

On vérifie que : $P(0) = P(-1) = P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Ainsi $0, -1, -\frac{1}{2}$ sont racines de P. Donc, d'après le théorème 5.4.3, P est divisible par $X(X+1)(X+\frac{1}{2})$, donc par D.

Solution de l'exercice 5.53

On trouve $P = Q$ car P et Q sont de degré au plus 2 (puisque le coefficient de degré 3 est nul) ; donc $P - Q$ aussi. Or a, b, c sont trois racines distinctes de $P - Q$, donc $\boxed{P - Q = 0.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.54

1. Les polynômes P et Q sont tous deux de degré n. Et on a :
$$P(0) = 1 = \frac{n!}{n!} = Q(0).$$
2. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a :
$$Q(i) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(i+k)}{n!} = \frac{(n+i)!}{i!n!} = C_{n+i}^{i},$$
3. De même :
$$\begin{aligned} P(i) &= 1 + i + \frac{i(i+1)}{2!} + \cdots + \frac{i(i+1)\cdots(i+n-1)}{n!} \\ &= 1 + C_i^1 + C_2^{i+1} + \cdots + C_{i+n-1}^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_{i+k-1}^{k}. \end{aligned}$$
4. Pour $i = 0$ on sait déjà, d'après la question 1 que $P(i) = Q(i)$. Pour $i \geqslant 1$ fixé montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la relation :
$$\sum_{k=0}^{n} C_{i+k-1}^{k} = C_{n+i}^{i}.$$
   - Pour $n = 1$ on a : $C_{i-1}^{0} + C_i^1 = 1 + i = C_{i+1}^{i}$, donc la relation est vraie.
   - Si la relation est vraie à l'ordre n alors :
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} C_{i+k-1}^{k} &= \left(\sum_{k=0}^{n} C_{i+k-1}^{k}\right) + C_{n+i}^{n+1} \\ &= C_{n+i}^{i} + C_{n+i}^{n+1} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= C_{n+i}^{i} + C_{n+i}^{i-1} \quad \text{d'après } C_m^k = C_m^{m-k} \\ &= C_{n+1+i}^{i} \quad \text{d'après l'égalité du triangle de Pascal} \end{aligned}$$

   Ainsi la relation est vraie à l'ordre $n + 1$.
5. Comme $P - Q$ est degré au plus n et possède $n + 1$ racines, à savoir $0, 1, \ldots, n$, on déduit que $P - Q = 0$ soit $\boxed{P = Q.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.56

1. **Multiplicité de 2 comme racine $X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$:**
$$\begin{aligned} P(2) &= 0 \\ P' &= 5X^4 - 20X^3 + 21X^2 - 4X + 4 \\ P'(2) &= 0 \\ P'' &= 20X^3 - 60X^2 + 42X - 4 \\ P''(2) &= 0 \\ P''' &= 60X^2 - 120X + 42 \\ P'''(2) &= 42 \neq 0 \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\text{la multiplicité est 3.}}$
2. De même -2 est racine $\boxed{\text{d'ordre 4}}$ de $X^5 + 7X^4 + 16X^3 + 8X^2 - 16X - 16$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.57

1. **Multiplicité de 1 comme racine de P :**

$$\begin{aligned}
P(1) &= 1-n+n-1=0\\
P' &= 2nX^{2n-1}-n(n+1)X^n+n(n-1)X^{n-2}\\
P'(1) &= 2n-n(n+1)+n(n-1)=0\\
P'' &= 2n(2n-1)X^{2n-2}-n^2(n+1)X^{n-1}+n(n-1)(n-2)X^{n-3}\\
P''(1) &= 2n(2n-1)-n^2(n+1)+n(n-1)(n-2)\\
&= n\,(4n-2-n(n+1)+(n-1)(n-2))\\
&= n\left(4n-2-n^2-n+n^2-3n+2\right)=0\\
P''' &= 2n(2n-1)(2n-2)X^{2n-3}-n^2(n+1)(n-1)X^{n-2}+n(n-1)(n-2)(n-3)X^{n-4}\\
P'''(1) &= 2n(2n-1)\underbrace{(2n-2)}_{=2(n-1)}-n^2(n+1)(n-1)+n(n-1)(n-2)(n-3)\\
&= n(n-1)\,(4n-2-n(n+1)+(n-2)(n-3))\\
&= n(n-1)\left(4n-2-n^2-n+n^2-5n+6\right)\\
&= n(n-1)(-2n+4)\\
&= -2n(n-1)(n-2)\neq 0 \text{ car } n\geqslant 5
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{1 est racine triple.}}$

2. **Multiplicité de 1 comme racine de Q :**
De même, on obtient que la multiplicité est 3.

3. **Multiplicité de 1 comme racine de R :**
Par le calcul on obtient :
$$R(1)=R'(1)=R''(1)=R'''(1)=0,$$
et
$$R^{(4)}(1)=n^2(n-1)(2n+2)\neq 0 \text{ car } n\geqslant 5$$
Donc 1 est $\boxed{\text{racine d'ordre 4.}}$

4. **Multiplicité de 1 comme racine de S :**
Par le calcul on obtient :
$$S(1)=S'(1)=S''(1)=0,$$
et
$$S'''(1)=2n(n-2)(n-4)\neq 0 \text{ car } n\geqslant 5$$
Donc 1 est $\boxed{\text{racine d'ordre 3.}}$

5. 1 est racine $\boxed{\text{d'ordre 5}}$ de T.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.58

Le polynôme P a -1 comme racine au moins double si et seulement si : $P(-1)=P'(-1)=0$. On trouva alors $\boxed{a=-5.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.59

Il suffit de vérifier que si $P(1)=0$ alors $P'(1)\neq 0$. Idem pour -1.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.60

Réponse : $\boxed{k+3.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.62

1. Le calcul donne : $\boxed{P' - P = -\dfrac{X^n}{n!}.}$

   Raisonnons par l'absurde : on suppose que P admet (au moins) une racine multiple, que l'on note x_0. Ainsi x_0 est est une racine d'ordre 2 au moins de P, soit $P(x_0) = P'(x_0) = 0$. Donc $(P' - P)(x_0) = 0$. Donc x_0 est racine du polynôme $P' - P = -\dfrac{X^n}{n!}$; or ce polynôme n'a que 0 comme racine. Donc $x_0 = 0$, ce qui est absurde puisque $P(0) = 1$ et donc x_0 n'est pas racine de P contrairement à ce qui avait été supposé !

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.64

On voit que $X^3 - X^2 - X + 1 = (X-1)^2(X+1)$. Il suffit donc de montrer que 1 est racine au moins double de P et -1 racine d'ordre au moins 1 de P *i.e.* : $P(1) = P'(1) = P(-1) = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.65

Si x_0 est la racine d'ordre 3 alors $P''(x_0) = 0$. La résolution de cette équation du second degré donne deux solutions $x_0 = 2$ ou $x_0 = \dfrac{5}{2}$. On vérifie qu'une des racines obtenue est bien racine triple en calculant $P(x_0)$ et $P'(x_0)$; on trouve que $\boxed{\text{2 est racine triple.}}$ Ensuite on factorise par $(X-2)^3$ pour trouver $\boxed{\text{la dernière racine qui est 3.}}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.76

1. **Multiplicité de 1 comme racine de P :**

   On calcule :

$$\begin{array}{rcl} P(1) & = & 1 - (1+\sqrt{3}) + \sqrt{3} + \sqrt{3} - (1+\sqrt{3})X + 1 = 0 \\ P' & = & 5X^4 - 4(1+\sqrt{3})X^3 + 3\sqrt{3}X^2 + 2\sqrt{3}X - (1+\sqrt{3}) \\ P'(1) & = & 5 - 4(1+\sqrt{3}) + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - (1+\sqrt{3}) = 0 \\ P'' & = & 20X^3 - 12(1+\sqrt{3})X^2 + 6\sqrt{3}X + 2\sqrt{3} \\ P''(1) & = & 20 - 12(1+\sqrt{3}) + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 8 - 4\sqrt{3} \neq 0 \end{array}$$

   Donc 1 est une racine double de P *i.e.* $\boxed{n = 2.}$

2. **Calcul de Q :**

   Le polynômes Q est nécessairement de degré $\deg P - n = 3$, de coefficient de plus haut degré 1, et de terme constant 1 *i.e.* :

$$Q = X^3 + aX^2 + bX + 1$$

   Donc :

$$(X-1)^2Q = (X^2-2X+1)(X^3+aX^2+bX+1) = X^5+(-2+a)X^4+(1-2a+b)X^3+(a-2b+1)X^2+(b-2)X+1.$$

   Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coefficients soit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2+a & = & -(1+\sqrt{3}) \\ 1-2a+b & = & \sqrt{3} \\ a-2b+1 & = & \sqrt{3} \\ b-2 & = & -(1+\sqrt{3}) \end{array} \right.$$

   soit : $a = b = -\sqrt{3} + 1$. Donc finalement :

$$\boxed{Q = X^3 + (-\sqrt{3}+1)X^2 + (-\sqrt{3}+1)X + 1.}$$

3. **Expression de Q en puissances de $X+1$:**
On utilise la $\boxed{\text{formule de Taylor en } -1}$:

$$Q = Q(-1) + Q'(-1)(X+1) + \frac{Q''(-1)}{2}(X+1)^2 + \frac{Q'''(-1)}{6}(X+1)^3.$$

On calcule :

$$\begin{array}{rcl} Q(-1) &=& -1 + (-\sqrt{3}+1) - (-\sqrt{3}+1) + 1 = 0 \\ Q' &=& 3X^2 + 2(-\sqrt{3}+1)X + (-\sqrt{3}+1) \\ Q'(-1) &=& 3 - 2(-\sqrt{3}+1) + (-\sqrt{3}+1) = 2 + \sqrt{3} \\ Q'' &=& 6X + 2(-\sqrt{3}+1) \\ Q''(-1) &=& -2\sqrt{3} - 4 \\ Q''' &=& 6 = Q'''(-1) \end{array}$$

D'où :

$$\boxed{Q = (2+\sqrt{3})(X+1) - (\sqrt{3}+2)(X+1)^2 + (X+1)^3.}$$

4. **Factorisations de P :**
La question précédente montre que Q est divisible par $X+1$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} Q &=& (X+1)\left((2+\sqrt{3}) - (\sqrt{3}+2)(X+1) + (X+1)^2\right) \\ &=& (X+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1) \end{array}$$

Par ailleurs le trinôme $X^2 - \sqrt{3}X + 1$ a un discriminant négatif. On obtient ainsi une factorisation de P par des polynômes de degré 1 ou de degré 2 sans racine réelle ; c'est donc la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ suivante :

$$\boxed{P = (X-1)^2(X+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1).}$$

Comme le trinôme $X^2 - \sqrt{3}X + 1$ a pour racines complexes conjuguées $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ on obtient la factorisation dans $\mathbb{C}$ suivante :

$$\boxed{P = (X-1)^2(X+1)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right).}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.80

1. $(X-z_1)(X-z_2)(X-z_3) = X^3 - (z_1+z_2+z_3)X^2 + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3)X - z_1z_2z_3$.
2. On a :
$$z_1z_2 + z_2cz_3 + z_1z_3 = \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \overline{z_3} + \overline{z_1} + \overline{z_2} = 1.$$
3. D 'où $(X-z_1)(X-z_2)(X-z_3) = X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$, d'où : $\boxed{\{z_1, z_2, z_3\} = \{1, i, -i\}.}$
4. Il y a $3! = 6$ manière d'ordonner les trois racines trouvées donc il y $\boxed{\text{6 triplets de solutions.}}$

Solution du problème 5.81

1. **Si α est racine de P alors α^2 aussi :**
   En effet, si α est racine de P, on a $P(\alpha) = 0$. Par ailleurs comme P vérifie l'$\boxed{\text{équation } (E)}$ on déduit :
   $$P(\alpha)P(\alpha+2) + P(\alpha^2) = 0,$$
   d'où $P(\alpha^2) = 0$, c'est-à-dire que α^2 est racine de P.
2. **α^{2^n} est racine de P :**
   Montrons $\boxed{\text{par récurrence sur } n \geqslant 0}$ la relation $\mathcal{R}(n)$ suivante : "α^{2^n} est racine de P"
   - La relation $\mathcal{R}(0)$ signifie que $\alpha^{2^0} = \alpha$ est racine de P. C'est vrai par hypothèse.
   - Si la relation $\mathcal{R}(n)$ est vraie alors $P\left(\alpha^{2^n}\right) = 0$. Or d'après l'équation (E) :
   $$P(\alpha^{2^n})P(\alpha^{2^n}+2) + P\left(\left(\alpha^{2^n}\right)^2\right) = 0,$$
   soit $P\left(\left(\alpha^{2^n}\right)^2\right) = P\left(\alpha^{2^{n+1}}\right) = 0$. Ainsi la relation $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie, elle aussi.
3. **$|\alpha|$ vaut 0 ou 1 :**
   Remarquons que $|\alpha^{2^n}| = |\alpha|^{2^n}$ est le terme général d'une suite réelle strictement croissante si $|\alpha| > 1$, ou strictement décroissante si $0 < |\alpha| < 1$. Ainsi $\boxed{\text{les nombres } \alpha^{2^n} \text{ sont tous différents}}$ si $|\alpha|$ ne vaut pas 0 ou 1. Ainsi, d'après la question précédente, si $|\alpha| \notin \{0,1\}$ $\boxed{\text{le polynôme } P,}$ supposé non nul, $\boxed{\text{possède une infinité de racines}}$ $\boxed{\text{distinctes,}}$ ce qui est impossible. Il n'est donc pas possible que $|\alpha| \notin \{0,1\}$.
4. **Si α est racine de P alors $(\alpha-2)^2$ aussi :**
   D'après $\boxed{\text{l'équation } (E) \text{ évaluée en } \alpha - 2,}$ on trouve :
   $$P(\alpha-2)P((\alpha-2)+2) + P((\alpha-2)^2) = 0.$$
   Ainsi si α est racine de P, on a : $P(\alpha) = P((\alpha-2)+2) = 0$, d'où
   $$P((\alpha-2)^2) = 0,$$
   c'est-à-dire que $(\alpha-2)^2$ est racine de P.
5. **Nombres complexes α tels que $|\alpha|, |\alpha-2| \in \{0,1\}$:**
   Il faut distinguer $\boxed{\text{quatre cas}}$
   - $|\alpha| = |\alpha-2| = 0$: alors $\alpha = \alpha - 2 = 0$ ce qui n'est pas possible.
   - $|\alpha| = 0$ et $|\alpha-2| = 1$: alors $\alpha = 0$ ce qui est incompatible avec la relation $|\alpha-2| = 1$.
   - $|\alpha| = 1$ et $|\alpha-2| = 0$: alors $\alpha = 2$ ce qui est incompatible avec la relation $|\alpha| = 1$.
   - $|\alpha| = |\alpha-2| = 1$: alors si on écrit α sous forme algébrique $\alpha = x + iy$ on a
   $$x^2 + y^2 = 1 \text{ et } (x-2)^2 + y^2 = 1,$$
   soit
   $$x^2 + y^2 = 1 \text{ et } x^2 + y^2 = 1 + 4x - 4.$$
   On a donc forcément $x = 1$, d'où $y = 0$ et c'est bien une solution.

   En résumé $\boxed{\text{il y a une seule solution } \alpha = 1.}$

6. **Solutions de (E) :**

Le polynôme nul est solution de E. De plus si P est non nul, on a vu aux questions 1,2 et 3 qu'alors ses racines α sont de module 1 ou 0. Par ailleurs, d'après la question 4, si α est racine alors $(\alpha-2)^2$ est racine aussi, donc elles sont toutes les deux de module 1 ou 0. Comme

$$\left|(\alpha-2)^2\right| \in \{0,1\} \Leftrightarrow |(\alpha-2)| \in \{0,1\},$$

on voit que les racines α de P sont des nombres α solution de la question 5, *i.e.* $\boxed{P \text{ n'a que 1 comme racine,}}$ *i.e.*

$$\exists(\lambda,n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{N}^*,\ P = \lambda(X-1)^n.$$

Si $\boxed{\text{on reporte cette expression dans l'équation } (E)}$ on trouve :

$$\lambda(X-1)^n\lambda(X+1)^n + \lambda(X^2-1)^n = 0,$$

soit

$$(\lambda^2+\lambda)(X^2-1)^n = 0.$$

Comme le polynôme X^2-1 n'est pas nul on a donc forcément $\lambda^2+\lambda=0$ *i.e.* $\lambda=-1$ (puisque $\lambda=0$ est exclu, car on s'est placé dans le cas où $P\neq 0$). Donc finalement les solutions de (E) sont les polynômes :

$$\boxed{P=0 \text{ et } P=-(X-1)^n,\ n\in\mathbb{N}^*.}$$

SOLUTION DU PROBLÈME 5.82

1. **Relation** $(1+X+\cdots+X^p)^2 = (p+1)X^p + \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)(X^k+X^{2p-k})$. **:**

Montrons cette relation $\mathcal{R}(p)$ $\boxed{\text{par récurrence sur } p \geqslant 1 :}$

– La relation $\mathcal{R}(1)$ signifie $(1+X)^2 = 2X+1+X^2$; elle est donc vraie.
– Si la relation $\mathcal{R}(p)$ est vraie :
Remarquons d'abord que pour tout p on a la relation $\mathcal{S}(p)$ suivante :

$$\begin{aligned}(p+1)X^p + \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)(X^k+X^{2p-k}) &= (p+1)X^p + \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)X^k + \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)X^{2p-k}\\ &= (p+1)X^p + \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)X^k + \sum_{k'=p+1}^{2p}(2p+1-k')X^{k'},\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $k' = 2p - k$ dans la dernière somme. D'où :

$$\begin{aligned}
& ((1 + X + \cdots + X^p) + X^{p+1})^2 \\
= \; & X^{2p+2} + 2X^{p+1}(1 + X + \cdots + X^p) + (1 + X + \cdots + X^p)^2 \\
= \; & X^{2p+2} + 2X^{p+1} + 2X^{p+2} + \cdots + 2X^{2p+1} + \left((p+1)X^p + \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)(X^k + X^{2p-k})\right) \quad \text{d'après } \mathcal{R}(p) \\
= \; & X^{2p+2} + \left(\sum_{k=p+1}^{2p} 2X^k\right) + 2X^{2p+1} + (p+1)X^p + \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)X^k + \sum_{k=p+1}^{2p}(2p+1-k)X^k \quad \text{d'après } \mathcal{S}(p) \\
= \; & \left\{ \left(\sum_{k=p+1}^{2p}(2p+3-k)X^k\right) + 2X^{2p+1} + X^{2p+2} \right\} + \left\{ \left(\sum_{k=0}^{p-1}(k+1)X^k\right) + (p+1)X^p \right\} \\
= \; & \left\{ (p+2)X^{p+1} + \sum_{k=p+2}^{2p+2}(2p+3-k)X^k \right\} + \sum_{k=0}^{p}(k+1)X^k \\
= \; & (p+2)X^{p+1} + \sum_{k=0}^{p}(k+1)(X^k + X^{2p+2-k}) \quad \text{d'après } \mathcal{S}(p+1),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\mathcal{R}(p+1)$ est vraie.

Relation $R_0 = \frac{1}{36}(1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5)^2$:
On a

$$\begin{aligned}
R_0 &= \frac{1}{36}(1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + 5X^4 + 6X^5 + 5X^6 + 4X^7 + 3X^8 + 2X^9 + X^{10}) \\
&= \frac{1}{36}\left((5+1)X^5 + \sum_{k=0}^{5-1}(k+1)(X^k + X^{2\times 5-k})\right) \\
&= \frac{1}{36}(1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5)^2 \text{ d'après 1.}
\end{aligned}$$

2. **Racines de $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$:**
Pour tout nombre complexe x différent de 1, on a :

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{1 - x^6}{1 - x}$$

En particulier, pour $x = -1, j, j^2, -j, -j^2$ (tous différents de 1) on a $x^6 = 1$, donc $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 0$. Ainsi ces cinq nombres (distincts) sont racines de $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$. Comme ce polynôme est $\boxed{\text{de degré } 5}$ il n'a pas d'autre racine, *i.e.*

$\boxed{\text{les racines de } 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 \text{ sont exactement } -1, j, j^2, -j, -j^2.}$

3. **Factorisation de R_0 sur $\mathbb{C}[X]$:**
Comme le coefficient dominant de $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$ est 1, et que les racines trouvées à la question précedente sont simples puisqu'il y en a 5 distinctes pour un polynôme de degré 5, on a :

$$1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 = (X+1)(X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2).$$

On déduit que :

$$\boxed{R_0 = \frac{1}{36}(X+1)^2(X-j)^2(X-j^2)^2(X+j)^2(X+j^2)^2.}$$

4. **Factorisation de R_0 sur $\mathbb{R}[X]$:**
On sait qu'il suffit de regrouper les racines complexes conjuguées l'une de l'autre. Ici on a

$$\boxed{\overline{j} = j^2 \text{ et } \overline{-j} = -j^2.}$$

Alors comme

$$\begin{aligned}(X-j)(X-j^2) &= X^2 - 2\mathrm{Re}\,(j) + |j|^2 \\ &= X^2 + X + 1 \\ (X+j)(X+j^2) &= X^2 - 2\mathrm{Re}\,(-j) + |-j|^2 \\ &= X^2 - X + 1,\end{aligned}$$

on trouve

$$\boxed{R_0 = \frac{1}{36}(X+1)^2(X^2+X+1)^2(X^2-X+1)^2.}$$

5. **$PQ = R_0$ entraîne $P = Q = \frac{1}{6}(1+X+X^2+X^3+X^4+X^5)$:**
Notons :

$$P = p_1 + p_2X + p_3X^2 + p_4X^3 + p_5X^4 + p_6X^5 \text{ et } Q = q_1 + q_2X + q_3X^2 + q_4X^3 + q_5X^4 + q_6X^5.$$

D'après la remarque admise dans l'énoncé P et Q sont nécessairement produits des facteurs obtenus dans la décomposition précédente. Comme de plus P et Q sont de degré 5 $\boxed{\text{il y a seulement trois possibilités}}$:

$$P = p_6(X+1)(X^2+X+1)^2 \text{ et } Q = q_6(X+1)(X^2-X+1)^2$$

$$P = p_6(X+1)(X^2-X+1)^2 \text{ et } Q = q_6(X+1)(X^2+X+1)^2$$

$$P = p_6(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1) \text{ et } Q = q_6(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1).$$

Montrons que $\boxed{\text{les deux premières ne sont en fait pas possibles.}}$ Le calcul donne :

$$Q = q_1+q_2X+q_3X^2+q_4X^3+q_5X^4+q_6X^5 = q_6(X+1)(X^2-X+1)^2 = q_6(X^5-X^4+X^3-X^2-X+1),$$

d'où $\boxed{q_5 = -q_6}$ — puisque deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients — ce qui n'est pas possible car les coefficients $\boxed{p_i \text{ et } q_i \text{ sont éléments de }]0,1].}$ On voit de même qu'il n'est pas possible que :

$$P = p_1+p_2X+p_3X^2+p_4X^3+p_5X^4+p_6X^5 = p_6(X+1)(X^2-X+1)^2 = p_6(X^5-X^4+X^3-X^2-X+1).$$

Il s'ensuit donc que :

$$P = p_1+p_2X+p_3X^2+p_4X^3+p_5X^4+p_6X^5 = p_6(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1) = p_6(X^5+X^4+X^3+X^2+X+1,),$$

d'où $p_6 = p_5 = p_4 = p_3 = p_2 = p_1$; comme leur somme vaut 1, d'après $P(1) = 1$, il valent donc tous $\frac{1}{6}$. On a ainsi prouvé :

$$\boxed{P = p_6(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1) = \frac{1}{6}(X^5+X^4+X^3+X^2+X+1),}$$

et on a $Q = \frac{1}{6}(X^5+X^4+X^3+X^2+X+1)$ de la même manière.

SOLUTION DU PROBLÈME 5.83

1. $\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ \varphi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. **:**
Si P est de degré 3, alors $P(X+1)$ aussi. La différence de deux polynômes de degré au plus trois est elle-même un polynôme de degré au plus 3, donc $\boxed{\varphi(P) = P(X+1) - P \text{ est de degré au plus 3.}}$

2. **Matrice A :**
Pour $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ on calcule :

$$\begin{aligned}
\varphi(P) &= P(X+1) - P \\
&= \big(a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d\big) - \big(aX^3 + bX^2 + cX + d\big) \\
&= aX^3 + 3aX^2 + 3aX + a + bX^2 + 2bX + b + cX + c + d - aX^3 - bX^2 - cX - d \\
&= 3aX^2 + (3a+2b)X + (a+b+c)
\end{aligned}$$

On a ainsi : $\boxed{\varphi(aX^3 + bX^2 + cX + d) = 3aX^2 + (3a+2b)X + (a+b+c).}$ D'où :

$$\varphi(P) = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 3a \\ \gamma = 3a+2b \\ \delta = a+b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix},$$

Il suffit donc de prendre :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

3. **Polynômes P tels que $\varphi(P) = 0$:**
Ces sont les polynômes P tels que $P = P(X+1)$. Si z_0 est une racine complexe d'un tel polynôme, on voit que :

$$P(z_0 + 1) = P(z_0) = 0,$$

donc $z_0 + 1$ aussi est une racine de P. Par une récurrence évidente, $z_0 + 2, z_0 + 3, \ldots, z_0 + n, \ldots$ sont aussi racines de P. Ainsi si P a une racine, alors $\boxed{P \text{ a une infinité de racines}}$, donc il est nul. Une autre possibilité est que P n'ait pas de racine complexe, c'est-à-dire, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, qu'il est constant non nul ; dans ce cas il est clair que $P = P(X+1)$ est vrai. En conclusion les polynômes solutions sont $\boxed{\text{les polynômes constants, nuls ou pas.}}$

4. **Existence et calcul de P tel que $\varphi(P) = Q$:**
Compte-tenu du résultat de la question 2 l'équation $\varphi(P) = Q$ s'écrit :

$$3aX^2 + (3a+2b)X + (a+b+c) = rX^2 + sX + t,$$

soit :

$$\begin{cases} r = 3a \\ s = 3a + 2b \\ t = a + b + c \end{cases}.$$

Ce système est échelonné, donc il admet une unique solution (a, b, c) :

$$a = \frac{r}{3},\quad b = \frac{s}{2} - \frac{r}{2},\quad c = t - \frac{s}{2} + \frac{r}{6}.$$

Il y a donc $\boxed{\text{plusieurs solutions } P}$ qui dépendent du choix de d :

$$\boxed{P = \frac{r}{3}X^3 + \left(\frac{s}{2} - \frac{r}{2}\right)X^2 + \left(t - \frac{s}{2} + \frac{r}{6}\right)X + d.}$$

5. **Calcul de $\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(P))))$:**
D'après la question 2, on voit que :

$$\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(P)))) = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = A\left(A\left(A\left(A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right)\right)\right).$$

Un calcul rapide donne $A^4 = 0$, donc $\boxed{\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(P)))) = 0.}$

Solution du problème 5.85

1. **Dérivée p^{e} de X^n :**
Le cours donne la relation :

$$\boxed{(X^n)^{(p)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!}X^{n-p} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}}$$

On peut la montrer par récurrence sur p.

2. **Dérivée n^{e} de P :**
Le polynôme P est le produit des deux polynômes X^n et $(1-X)^n$. Les dérivés successives de $(1-X)^n$, sont donnée, de manière analogue à celles de X^n par :

$$((1-X)^n)^{(p)} = (-1)^p \frac{n!}{(n-p)!}(1-X)^{n-p}.$$

On dérive alors le produit P en utilisant la $\boxed{\text{formule de Leibniz :}}$

$$\begin{aligned} P^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (X^n)^{(k)} \left((1-X)^n\right)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} \times (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-(n-k))!}(1-X)^{n-(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} \frac{(n!)^2}{(n-k)!k!} X^{n-k}(1-X)^k \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 (-1)^{n-k} X^{n-k}(1-X)^k, \end{aligned}$$

d'après $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Ainsi :

$$\boxed{P^{(n)} = n! \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 (-1)^{n-k} X^{n-k}(1-X)^k.}$$

3. **Relation portant sur $P^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)$:**

   On evalue la formule précédente $\boxed{\text{en } x = \frac{1}{2}\,;}$ comme

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n},$$

   on trouve

$$P^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = n!\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(-1)^{n-k},$$

   d'où $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(-1)^{n-k} = \frac{2^n}{n!}P^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right).}$

4. **Relation $P = \left(\frac{1}{4} - \left(X-\frac{1}{2}\right)^2\right)^n$:**

   En développant on remarque juste que

$$\left(\frac{1}{4} - \left(X-\frac{1}{2}\right)^2\right) = -X^2 + X = X(1-X),$$

   d'où le résultat en élevant à la puissance n.

5. **Expression de P en fonction des $\left(X-\frac{1}{2}\right)^k$:**

   La $\boxed{\text{formule du binôme}}$ donne :

$$\left(\frac{1}{4} - \left(X-\frac{1}{2}\right)^2\right)^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k\frac{(-1)^k}{4^{n-k}}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{2k}.$$

   On obtient ainsi une expression de P comme combinaison linéaire des puissances de $X-\frac{1}{2}$.

6. **Valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(C_n^k)^2$:**

   La $\boxed{\text{formule de Taylor}}$ pour les polynômes donne, pour P (de degré $2n$) en $\frac{1}{2}$:

$$P = \sum_{p=0}^{2n}\frac{P^{(p)}\left(\frac{1}{2}\right)}{p!}\left(X-\frac{1}{2}\right)^p.$$

   Or les polynômes $\left(X-\frac{1}{2}\right)^p$ pour $p = 0,\ldots,2n$ sont chacun de degré exactement p, donc c'est une $\boxed{\text{famille échelonnée de polynômes}\,;}$ en particulier l'écriture du polynôme P comme combinaison linéaire de ces polynômes est unique. On peut donc identifier les coefficients de la formule obtenue par la formule de Taylor, avec ceux de la formule obtenue par la formule du binôme *i.e.* :

$$\frac{P^{(p)}\left(\frac{1}{2}\right)}{p!} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ impair} \\ C_n^k\frac{(-1)^k}{4^{n-k}} & \text{si } p \text{ pair } (p=2k) \end{cases}.$$

   Pour $p = n$, on a en particulier :

$$\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(-1)^{n-k} = \frac{2^n}{n!}P^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ 2^nC_n^{\frac{n}{2}}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{4^{n-\frac{n}{2}}} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}.$$

   Soit $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(-1)^{n-k} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}C_n^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}}$

SOLUTION DU PROBLÈME 5.86

1. **Degré et coefficient de plus haut degré de P :**
La formule du binôme donne :
$$(1+X)^{2n} = X^{2n} + 2nX^{2n-1} + \frac{(2n)(2n-1)}{2}X^{2n-2} + \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)}{6}X^{2n-3} \cdots + 2nX + 1$$
et, comme $(-1)^{2n} = 1$:
$$(1-X)^{2n} = X^{2n} - 2nX^{2n-1} + \frac{(2n)(2n-1)}{2}X^{2n-2} - \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)}{6}X^{2n-3} + \cdots - 2nX + 1$$
Après simplifications il ne reste que des termes de degré impair :
$$\boxed{(1+X)^{2n} - (1-X)^{2n} = 4nX^{2n-1} + \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)}{3}X^{2n-3} + \cdots + 4nX.}$$
Ainsi P est $\boxed{\text{de degré } 2n-1}$ et $\boxed{\text{de coefficient dominant } 4n.}$

2. **Racines de P dans $\mathbb{C}$:**
Les racines sont les nombres complexes z tels que $P(z) = 0$, soit :
$$\begin{aligned}
(1+z)^{2n} - (1-z)^{2n} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (1+z)^{2n} = (1-z)^{2n} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(1+z)^{2n}}{(1-z)^{2n}} = 1 \text{ car } z = 1 \text{ n'est pas solution} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n} = e^{i0} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1+z}{1-z} = e^{i\frac{2k\pi}{2n}} = e^{i\frac{k\pi}{n}},\ k \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\} \\
&\Leftrightarrow \quad 1+z = e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}}z \\
&\Leftrightarrow \quad z(1+e^{i\frac{k\pi}{n}}) = e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1
\end{aligned}$$
On a : $e^{i\frac{k\pi}{n}} = -1$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$ si et seulement si $k = n$. Donc pour $k = n$ l'équation précédente s'écrit $0z = -2$ et n'a pas de solution. Ainsi les racines sont :
$$z = \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1}{e^{i\frac{k\pi}{n}} + 1},\ k \in \{0, \ldots, n-1\} \cup \{n+1, \ldots, 2n-1\}.$$
Comme
$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1}{e^{i\frac{k\pi}{n}} + 1} &= \frac{e^{i\frac{k\pi}{2n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{2n}} - e^{-i\frac{k\pi}{2n}}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{2n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{2n}} + e^{-i\frac{k\pi}{2n}}\right)} \\
&= \frac{2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{2\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \\
&= i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right),
\end{aligned}$$
il s'ensuit que l'ensemble des racines est :
$$\boxed{\left\{ i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \;\middle|\; k \in \{0, \ldots, n-1\} \cup \{n+1, \ldots, 2n-1\} \right\}}$$
En particulier, pour $k = 0$ on voit que 0 est racine de P.

3. **Les racines sont simples :**

   Remarquons que, pour $k \in \{0, \ldots, n-1\} \cup \{n+1, \ldots, 2n-1\}$ les nombres $\frac{k\pi}{2n}$ sont tous distincts et éléments de l'intervalle $[0, \pi]$. Or la fonction tangente est injective sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ *i.e.* :

$$\forall x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[,\ x \neq y \Rightarrow \tan x \neq \tan y.$$

   En particulier les $2n-1$ racines trouvées à la question précédente sont donc toutes différentes. Comme P est un polynôme de degré $2n-1$ la somme des multiplicités des racines vaut $2n-1$. Finalement $\boxed{\text{la multiplicité de chaque racine est 1.}}$

4. **Relation :** $P = 4nX \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 + \tan^2 \frac{k\pi}{2n}\right)$ **:**

   Du polynôme complexe P on connait les racines, avec leur multiplicité, ainsi que le coefficient dominant. On peut donc écrire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P = 4n \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) \prod_{k=n+1}^{2n-1} \left(X - i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right).$$

   On remarque que pour $k \in \{n+1, \ldots 2n-1\}$

$$\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \tan\left(\frac{(k-2n)\pi}{2n} + \pi\right) = \tan\left(\frac{(k-2n)\pi}{2n}\right) = -\tan\left(\frac{k'\pi}{2n}\right),$$

   avec $k' = -(k-2n) \in \{1, \ldots, n-1\}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} P &= 4n \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) \prod_{k'=1}^{n-1} \left(X + i\tan\left(\frac{k'\pi}{2n}\right)\right) \\ &= 4nX \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) \prod_{k'=1}^{n-1} \left(X + i\tan\left(\frac{k'\pi}{2n}\right)\right) \text{ car } \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = 0 \text{ si } k = 0 \\ &= 4nX \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)\left(X + i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) \\ &= 4nX \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 + \tan^2 \frac{k\pi}{2n}\right) \end{aligned}$$

   La relation obtenue n'est rien d'autre que la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ obtenue en séparant les racines réelles et en regroupant les racines complexes non réelles avec leur conjugué (puisque P est un polynôme réel).

5. **Valeur de :** $\prod_{k=1}^{n-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2n}$ **:**

   En développant l'expression de P obtenue à la question précédente, on obtient :

$$\boxed{P = 4nX^{2n-1} + \left(4n \sum_{k=1}^{n-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2n}\right) X^{2n-3} + \cdots + \left(4n \prod_{k=1}^{n-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2n}\right) X.}$$

   Le produit recherché apparait ainsi dans le coefficient du terme en X. Le calcul effectué à la question 1 donne alors :

$$4n \prod_{k=1}^{n-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2n} = 4n,$$

soit :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2n} = 1}$$

Autre méthode : le coefficient du terme en X est $P'(0)$ d'après la formule de Taylor en 0 :

$$P = P(0) + P'(0)X + \cdots$$

Comme

$$P' = 2n(1+X)^{2n-1} + 2n(1-X)^{2n-1},$$

on trouve $P'(0) = 4n$.

6. **Valeur de :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2n}$ **:**

En comparant les expressions de P obtenues aux questions 1 et 5, l'égalité des coefficients de X^{2n-3} donne :

$$4n \sum_{k=1}^{n-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2n} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)}{3},$$

soit

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2n} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)}{12n} = \frac{(2n-1)(n-1)}{3}.}$$

SOLUTION DU PROBLÈME 5.88

1. $e^{i\frac{2\pi}{n}}$ **est racine de** P **:**

On effet :

$$\begin{aligned}
P\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right) &= \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n-1} + \cdots + 1 \\
&= \frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} \\
&\quad \text{d'après la formule de sommation bien connue : } x^{n-1} + \cdots + 1 = \frac{1-x^n}{1-x} \text{ si } x \neq 1 \\
&= \frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} \\
&= \frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où le résultat.
N.B. : la formule de sommation s'applique seulement si $e^{i\frac{2\pi}{n}} \neq 1$ *i.e.* si $n \geqslant 2$.

2. $z + \dfrac{1}{z}$ **est racine de** $X^2 + X - 1$ **si** z **est racine de** $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ **:**

En effet, comme $z = 0$ n'est pas racine de $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ on peut supposer que $z \neq 0$. Alors on a :

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2},$$

d'où :

$$\begin{aligned} z^4+z^3+z^2+z+1 &= z^2\left(z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right) \\ &= z^2\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1\right) \\ &= z^2\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1\right). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$z^4+z^3+z^2+z+1=0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0,$$

d'où le résultat annoncé.

3. **Calcul de** $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ **:**

$\boxed{\text{D'après la question 1,}}$ pour $n=5$, le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ est racine du polynôme :

$$X^4+X^3+X^2+X+1.$$

Donc, $\boxed{\text{d'après la question 2,}}$ on en déduit que le nombre :

$$u=e^{i\frac{2\pi}{5}}+\frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}}=e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{-i\frac{2\pi}{5}}=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \quad \left(\text{d'après } \boxed{\text{les formules d'Euler}}\right)$$

est racine du polynôme X^2+X-1. Or, par calcul direct, les racines de X^2+X-1 sont :

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Or, comme $\frac{2\pi}{5}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$,

et donc $u>0$. Ainsi, nécessairement $u=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ d'où :

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{u}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}.}$$

4. **La portion OCM fait un cinquième de la surface du dique :**

D'après l'énoncé les segments OA et OB' ont pour longueurs respectives : $OA=\dfrac{1}{4}$ et $OB=\dfrac{1}{2}$.

Par ailleurs le $\boxed{\text{théorème de Pythagore}}$ donne :

$$(A'B')^2=OA^2+OB^2.$$

On a donc :

$$A'B'=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Comme les points C' et B' sont situés sur le même cercle de centre A' et de rayon $A'B'=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ on en déduit que : $A'C'=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

Enfin, comme les points $A', 0$ et C' sont sur la même droite, on a :

$$OC' = A'C' - OA' = \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}.$$

On remarque alors que, $\boxed{\text{d'après la question 3,}}$: $\boxed{OC' = \cos\left(\frac{2\pi}{5}.\right)}$

Ainsi le point M, situé sur le cercle trigonométrique, a pour abscisse $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ce qui signifie que $\boxed{M \text{ est le point d'affixe } e^{i\frac{2\pi}{5}}}$ (ou $e^{-i\frac{2\pi}{5}}$ si on a choisi pour M l'autre point d'intersection du cercle avec la droite parallèle à (OB)). Comme la surface d'une portion de disque est proportionnelle à l'angle décrit on en déduit bien que la portion OCM fait un cinquième de la surface du dique.

5. **Calculs de $\cos\frac{2\pi}{n}$ et $\sin\frac{2\pi}{n}$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 20, 30$:**

Les valeurs de $\cos\frac{2\pi}{n}$ et $\sin\frac{2\pi}{n}$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 6, 8$ sont données dans le cours.
<u>Pour $n = 5$:</u> la valeur de $\cos\frac{2\pi}{n}$ a été trouvée à la question 3 ; alors comme :

$$\cos^2\frac{2\pi}{5} + \sin^2\frac{2\pi}{5} = 1 \text{ et } \sin\frac{2\pi}{5} > 0$$

on en déduit :

$$\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

<u>Pour $p = 12, 20, 30$,</u> on remarque que $p = n(n+1)$ avec $n = 3, 4, 5$, et que de plus :

$$\boxed{\frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{n+1} = \frac{2\pi}{n(n+1)} = \frac{2\pi}{p}.}$$

Ainsi on peut calculer les sinus et cosinus au moyen des $\boxed{\text{formules d'addition des angles :}}$

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{p} &= \cos\frac{2\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{(n+1)} + \sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{(n+1)}\\ \sin\frac{2\pi}{p} &= \sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{(n+1)} - \cos\frac{2\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{(n+1)}\end{aligned}$$

En résumé on obtient :

n	1	2	3	4	5	6	8	12	20	30
$\cos\frac{2\pi}{n}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$
$\sin\frac{2\pi}{n}$	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}(-1+\sqrt{5})-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$

6. **Existence de P_n tel que $P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$:**

On remarque que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right) = \left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right) + \left(z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}}\right) \qquad (R)$$

On a donc l'idée de définir la suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ par récurrence par :

$$P_0 = 2, P_1 = X, \text{ et } P_{n+1} = XP_n - P_{n-1},$$

et on montre par récurrence sur $n \geqslant 1$ la relation :

$$\forall k \leqslant n,\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}.$$

– C'est vrai pour $n = 1$ car on a pris $P_0 = 2$ et $P_1 = X$ et donc :

$$P_0\left(z+\frac{1}{z}\right) = 2 = z^0 + \frac{1}{z^0} \text{ et } P_1\left(z+\frac{1}{z}\right) = z + \frac{1}{z} = z^1 + \frac{1}{z^1}.$$

– Si c'est vrai pour $n \geqslant 1$ alors, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a :

$$\begin{aligned} P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right) &= \left(z+\frac{1}{z}\right) P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) - P_{n-1}\left(z+\frac{1}{z}\right) \text{ d'après la définition des } P_k \\ &= \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) - \left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right) \\ &\qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence pour } P_{n-1} \text{ et } P_n \\ &= z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}} \text{ d'après la relation } (R) \end{aligned}$$

Donc la relation est vraie à l'ordre $n + 1$.

Unicité des P_n :

Si, pour n donné, $\boxed{\text{un autre polynôme } Q_n}$ vérifie, pour tout $z \neq 0$:

$$Q\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}.$$

Alors, par différence :

$$(P_n - Q_n)\left(z+\frac{1}{z}\right) = 0.$$

Or, quand z décrit $\mathbb{C}^*$, les nombres $z+\frac{1}{z}$ prennent une infinité de valeurs distinctes ; ainsi la relation précédente signifie que le polynôme $P_n - Q_n$ admet une infinité de racines, ce qui n'est possible que si c'est le polynôme nul. Et donc $\boxed{P_n = Q_n.}$

7. **Degré de P_n :**

On montre par récurrence que $\boxed{\deg P_n = n.}$

Racines de P_n :

La relation $P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$ appliquée en $z = e^{it}$ donne, d'après les formules d'Euler :

$$\boxed{P_n(2\cos t) = 2\cos nt.}$$

Or :

$$\cos nt = 0 \Leftrightarrow nt = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2n} + k\frac{2\pi}{n}.$$

Ainsi les nombres $\boxed{z_k = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{2\pi}{n}\right)}$ sont racines de P_n. Quand k décrit $\mathbb{Z}$ les nombres z_k prennent n valeurs distinctes pour $\boxed{k = 0, 1, \ldots, n-1,}$ donc le polynôme P_n, de degré n, admet n racines distinctes ; il n'en a donc pas d'autres.

8. **$2\cos\frac{2\pi}{7}$ est racine de $P = X^3 + X^2 - 2X - 1$. :**

En utilisant la relation de récurrence :

$$P_0 = 2, P_1 = X, \text{ et } P_{n+1} = XP_n - P_{n-1},$$

on a :

$$P_2 = X^2 - 2 \text{ et } P_3 = x^3 - 3X.$$

Et donce, pour tout $z \neq 0$, on a :

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 \text{ et } z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

d'où :

$$\begin{aligned} 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 &= z^3\left(1 + z + \frac{1}{z} + z^2 + \frac{1}{z^2} + z^3 + \frac{1}{z^3}\right) \\ &= z^3\left(1 + \left(z + \frac{1}{z}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 + \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \\ &= z^3\left(-1 - 2\left(z + \frac{1}{z}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right)^3\right) \\ &= P\left(z + \frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

D'après la question 1, le nombre $e^{i\frac{2\pi}{7}}$ est racine du polynôme $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6$. Ainsi, comme à la question 2, on en déduit que :

$$2\cos\frac{2\pi}{7} = e^{i\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{7}}}$$

est racine de P.

SOLUTION DU PROBLÈME 5.89

1. **Calcul de u_n :**
   La suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

   $$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 15u_n, \text{ avec } u_0 =, u_1 = 5.$$

   L'équation caractéristique est $x^2 - 2x - 15 = 0$ qui admet comme racines 5 et -3. La suite (u_n) est donc de la forme :

   $$u_n = \alpha 5^n + \beta(-3)^n.$$

   On trouve α et β à partir des conditions initiales :

   $$\begin{cases} u_0 = 1 = \alpha + \beta \\ u_1 = 5 = 5\alpha - 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (1, 0).$$

   D'où $\boxed{u_n = 5^n.}$

2. **Calcul de v_n :**
   Montrons par récurrence sur n, à partir de $n = 0$, la propriété suivante :

   $$\forall p \leqslant n,\ v_p = e^{ip\theta}.$$

   – *La propriété est vraie à l'ordre $n = 0$*
     car : $P_0(e^{i\theta} - 1) = 1 = e^{i0\theta}$.
   – *Si la propriété est vraie à l'ordre n, alors elle est vraie à l'ordre $n + 1$.*
     En effet si on sait que $P_0(e^{i\theta} - 1) = e^{i0\theta}, P_1(e^{i\theta} - 1) = e^{i1\theta}, \ldots, P_{n-1}(e^{i\theta} - 1) = e^{i(n-1)\theta}, P_n(e^{i\theta} - 1) = e^{in\theta}$, alors

   $$\begin{aligned} P_{n+1}(e^{i\theta} - 1) &= 2P_n(e^{i\theta} - 1) + ((e^{i\theta} - 1)^2 - 1)P_{n-1}(e^{i\theta} - 1) \\ &= 2e^{in\theta} + ((e^{i\theta} - 1)^2 - 1)e^{i(n-1)\theta} \\ &= 2e^{in\theta} + (e^{i2\theta} - 2e^{i\theta})e^{i(n-1)\theta} \\ &= 2e^{in\theta} + (e^{i(n+1)\theta} - 2e^{in\theta}) \\ &= e^{i(n+1)\theta}. \end{aligned}$$

3. **Relation $P = (1+X)^n$:**
En effet, d'après la question précédente, cette relation est vraie pour $x = e^{i\theta} - 1$, pour tout nombre réel θ. Ainsi le polynôme $P - (1+X)^n$ a une infinité de racines distinctes, à savoir les $e^{i\theta} - 1$, pour $\theta \in [0, 2\pi[$; il est donc nul, c'est-à-dire $\boxed{P = (1+X)^n.}$

4. **Calcul de Re $(P_n(e^{i\theta}))$:**
On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,(P_n(e^{i\theta})) &= \mathrm{Re}\,((1+e^{i\theta})^n) \\
&= \mathrm{Re}\,\left(\left(e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})\right)^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\,\left(e^{i\frac{n\theta}{2}}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\right) \\
&= \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n \mathrm{Re}\,\left(e^{i\frac{n\theta}{2}}\right) \\
&= \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n \cos\frac{n\theta}{2}.
\end{aligned}$$

5. **Calcul de $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta)$:**
D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,(P_n(e^{i\theta})) &= \mathrm{Re}\,((1+e^{i\theta})^n) \\
&= \mathrm{Re}\,\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{i\theta})^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \mathrm{Re}\,\left(e^{ik\theta}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta).
\end{aligned}$$

On déduit : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta) = 2^n \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^n \cos\frac{n\theta}{2}.}$

Solutions des exercices du chapitre 6

Solution de l'exercice 6.1

1. $Df = Df' = \mathbb{R} - \{2\}$ et $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$.
2. $Df = Df' = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ et $f'(x) = -\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$.
3. $Df = Df' = \mathbb{R} - \{1\}$ et $f'(x) = -\dfrac{15(x^2+1)^2}{(x-1)^6}$.
4. $Df = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty[$, $Df' = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x+1}}$.
5. $Df = Df' = \mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{4x^2+1}{\sqrt{2x^2+1}}$.
6. $Df =]-1, 1]$, $Df' =]-1, 1[$ et $f'(x) = \dfrac{1-x-x^2}{(x+1)^2\dfrac{1-x}{1+x}}$.
7. $Df = Df' =]-\infty, 2[$ et $f'(x) = \dfrac{4-x}{2(2-x)\sqrt{2-x}}$.
8. $Df = [-1, +\infty[$, $Df' =]-1, +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{15x}{2}\sqrt{x+1}$.
9. **Dérivée de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x} + \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$:**
   Comme, pour tout x on a $\sqrt{x^2+1} \neq x$ et $\neq -x$ on a $Df = Df' = \mathbb{R}$.
   Pour le calcul $\boxed{\text{on simplifie d'abord}}$ l'expression de f avant de dériver :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x} + \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2 + \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 + 2x\sqrt{x^2+1} + x^2 + \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - 2x\sqrt{x^2+1} + x^2}{(x^2+1) - x^2} \\
&= 2(x^2+1) + 2x^2 \\
&= 4x^2 + 2 \\
f'(x) &= \boxed{8x.}
\end{aligned}$$

10. **Dérivée de $f(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$:**
    On a $Df = Df' = \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$.
    On calcule :

$$\begin{aligned}
(x-1)(x-2)(x-3) &= x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\
(x+1)(x+2)(x+3) &= x^3 + 6x^2 + 11x + 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(3x^2+12x+11)(x^3-6x^2+11x-6)-(3x^2-12x+11)(x^3+6x^2+11x+6)}{(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2} \\
&= \frac{(3x^5-6x^4-28x^3+48x^2+49x-66)-(3x^5+6x^4-28x^3-48x^2+49x+66)}{(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2} \\
&= \frac{-12x^4+96x^2-132}{(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2} \\
&= \boxed{12\frac{-x^4+8x^2-11}{(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2}}
\end{aligned}$$

11. **Dérivée de** $f(x) = \dfrac{5x^3+30x^2+40x+16}{\sqrt{(x+1)^5}}$ **:**

On a : $Df = Df' =]-1,+\infty[$.
D'après les règles de calcul sur les dérivées, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{(x+1)^5}\right)' &= \left((x+1)^{\frac{5}{2}}\right)' \\
&= \frac{5}{2}\left((x+1)^{\frac{3}{2}}\right) \\
f'(x) &= \frac{(15x^2+60x+40)\sqrt{(x+1)^5}-\frac{5}{2}(x+1)^{\frac{3}{2}}\left(5x^3+30x^2+40x+16\right)}{(x+1)^5} \\
&\quad \text{(dérivée d'un quotient)} \\
&= \frac{(15x^2+60x+40)(x+1)-\frac{5}{2}\left(5x^3+30x^2+40x+16\right)}{(x+1)^{\frac{7}{2}}} \\
&\quad \text{(simplification par } (x+1)^{\frac{3}{2}}) \\
&= \frac{\frac{5}{2}x^3}{(x+1)^{\frac{7}{2}}} \\
&= \boxed{\frac{5x^3}{2\sqrt{(x+1)^7}}.}
\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.4

On a $g(x) = f(x^2)$, $h(x) = f(\sqrt{x})$, $i(x) = \sqrt{f(x)}$ où $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$. Comme : $f'(x) = \dfrac{4}{(x+3)^2}$ on déduit :

$$g'(x) = 2xf'(x^2) = \frac{8x}{(x^2+3)^2}$$

$$h'(x) = \frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)^2}$$

$$i'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{2}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.5

1. **Calculer de** f' **:**

La linéarité de la dérivation donne :

$$\boxed{f'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}}$$

Par ailleurs on sait que, pour $x \neq 1$, on a :

$$f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

On dérive alors f grâce à la formule de dérivation d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1 - x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \boxed{\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.}$$

2. **Expression de $S(x)$:**

   Pour $x \neq 1$ on reconnaît que $S(x) = f'(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

   Pour $x = 1$ on a : $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Donc finalement :

$$\boxed{S(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} & \text{si } x \neq 1 \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & \text{si } x = 1. \end{cases}}$$

Solution de l'exercice 6.8

1. $Df = Df' = \mathbb{R}$ et $f'(x) = -xe^x$.
2. $Df = Df' = \mathbb{R}$ et $f'(x) = x^2 e^x$.
3. $Df = Df' = \mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$.
4. $Df = Df' = \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x + 1}}$.
5. $Df = Df' = \mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \left(-\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right) e^x$.
6. $Df = Df' = \{ x \in \mathbb{R} \mid \cos x + x \sin x \neq 0 \}$ et

$$f'(x) = \frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}.$$

7. $Df = Df' = \mathbb{R}$ et $f'(x) = 2\sin^2 x$.
8. $Df = Df' = \mathbb{R}$ et $f'(x) = x^3 \sin x$.
9. **Dérivée de $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x} + \dfrac{2}{\tan x}$:**

   On a :

$$Df = Df' = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0 \text{ et } \cos x \neq 0 \} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

D'après les règles de calcul sur les dérivées, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{2\cos x}{\sin x}\right)' \\
&= \frac{(-\sin x)\sin^3 x - (\cos x)(3\cos x \sin^2 x)}{\sin^6 x} + 2\frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-\sin^2 x - 3\cos^2 x}{\sin^4 x} - 2\frac{1}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-\sin^2 x - 3\cos^2 x - 2\sin^2 x}{\sin^4 x} \\
&= \boxed{-\frac{3}{\sin^4 x}.}
\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.10

$$f'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} ike^{itk} = i\left(C(t) + iS(t)\right).$$

Par ailleurs, comme $e^{it} \neq 1$ puisque $t \in T$, on a :

$$f(t) = \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}},$$

d'où, en utilisant la formule de dérivation d'un quotient :

$$\begin{aligned}
f'(t) &= i\left(\frac{e^{it} - ne^{int} + (n-1)e^{it(n+1)}}{(1-e^{it})^2}\right) \\
&= i\left(\frac{e^{it} - ne^{int} + (n-1)e^{it(n+1)}}{-4\sin^2\frac{t}{2}\, e^{it}}\right) \\
&= i\left(\frac{1 - ne^{i(n-1)t} + (n-1)e^{int}}{-4\sin^2\frac{t}{2}}\right).
\end{aligned}$$

d'où, par identification des parties réelle et imaginaire :

$$\boxed{C(t) = \frac{1 - n\cos(n-1)t + (n-1)\cos nt}{-4\sin^2\frac{t}{2}} \text{ et } S(t) = \frac{-n\sin(n-1)t + (n-1)\sin nt}{-4\sin^2\frac{t}{2}}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.13

$$g'(x) = 2xf'(x^2) \quad g''(x) = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2) \text{ et } g'''(x) = 12xf''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.14

Si on ne se trompe pas dans les calculs (!) on trouve, après simplifications ($[\cdots]$) :

$$\boxed{\frac{v''}{v} = -\frac{2f'''f' - 3(f'')^2}{4(f')^2} = \frac{u''}{u}.}$$

Autre méthode, plus subtile : on remarque que : $\boxed{v = fu.}$
D'après la formule de Leibniz on a déduit : $v'' = f''u + 2f'u' + fu''$,
d'où :

$$\begin{aligned} \frac{v''}{v} &= \frac{f''u + 2f'u' + fu''}{fu} \\ &= \frac{f''}{f} + 2\frac{f'u'}{fu} + \frac{u''}{u} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} u' &= \left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)' \\ &= -\frac{1}{2}f''f'^{-\frac{3}{2}} \\ \text{donc} \qquad \frac{f'u'}{fu} &= \frac{-\frac{1}{2}f''f'^{-\frac{3}{2}}f'}{f'^{-\frac{1}{2}}f} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{f''}{f} \\ \text{donc} \qquad \frac{f''}{f} + 2\frac{f'u'}{fu} &= 0 \end{aligned}$$

On déduit bien que :

$$\boxed{\frac{v''}{v} = \frac{u''}{u}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.17

1. $r^{(n)}(x) = i^n e^{ix} = e^{i\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)}$.
2. D'après $r^{(n)}(x) = \cos^{(n)}(x) + i\sin^{(n)}(x)$.
3. **Calculs de dérivées d'ordre n :**

$$\boxed{f^{(n)}(x) = 4^n \sin^{(n)}(4x) = 4^n \sin\left(4x + n\frac{\pi}{2}\right).}$$

$$\boxed{g^{(n)}(x) = \frac{1}{4^n}\cos\left(\frac{x}{4} + n\frac{\pi}{2}\right).}$$

Linéariser h et i en :

$$h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \text{ et } i(x) = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x.$$

D'où, pour $n \geqslant 1$:

$$\boxed{h^{(n)}(x) = -2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right).}$$

Et, pour tout n :

$$\boxed{i^{(n)}(x) = -\frac{3^n}{4}\sin\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{4}\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3^n}{4}\cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{4}\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).}$$

Solution de l'exercice 6.18

1. Par récurrence sur n.
2. On a :
$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}=\frac{a(x+2)+b(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{(a+b)x+(2a-b)}{x^2+x-2}.$$
Pour que h soit de la forme indiquée $\boxed{\text{il suffit}}$ donc que $a+b=1$ et $2a-b=0$, soit $\boxed{a=\frac{1}{3} \text{ et } b=\frac{2}{3}.}$
3. On déduit :
$$\boxed{\frac{1}{3}\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}+\frac{2}{3}\frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}.}$$
4. On trouve de même :
$$\boxed{f^{(n)}(x)=\frac{2^n n!}{(1-2x)^{n+1}}.}$$
Comme $g(x)=\frac{1}{2}i''(1+2x)$ on a :
$$\boxed{g^{(n)}(x)=2^{n-1}\frac{(-1)^n(n+2)!}{(1+2x)^{n+3}}.}$$
Comme $j(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}$, on a :
$$\boxed{j^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.}$$
On a :
$$\boxed{k^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!\alpha^n}{(\alpha x+\beta)^{n+1}}.}$$
Comme $l(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$, on a :
$$\boxed{l^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}+\frac{1}{2}\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.}$$

Solution de l'exercice 6.19

Utiliser la $\boxed{\text{formule de Leibniz}}$ et simplifier en tenant compte du fait que les dérivées successives des polynômes sont assez vite nulles. On obtient :

1. $f^{(n)}(x)=(x+n)e^x$.
2. $f^{(n)}(x)=((3x^2-1)+n(6x)+\frac{n(n-1)}{2}\times 6)e^x=(3x^2-6nx+3n(n-1)-1)e^x$.
3. $f^{(n)}(x)=((x+1)^2-2n(x+1)+3n(n-1))e^{-x}$.
4. En utilisant le résultat de l'exercice 6.17 on obtient :
$$\begin{aligned}&(x^2+1)\sin^{(n)}x+2nx\sin^{(n-1)}x+n(n-1)\sin^{(n-2)}x\\ =\;&(x^2+1)\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+2nx\sin\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)+n(n-1)\sin\left(x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

5. D'après l'exercice 6.18 on a :

$$\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)^{(n)} = \frac{(n+1)!(-1)^n}{(x+1)^{n+2}}.$$

   La formule de Leibniz donne alors :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (x^2+1)\times\frac{(n+1)!(-1)^n}{(x+1)^{n+2}} + 2nx\times\frac{n!(-1)^{n-1}}{(x+1)^{n+1}} + n(n-1)\times\frac{(n-1)!(-1)^n}{(x+1)^n} \\ &= \frac{n!(-1)^n}{(x+1)^{n+2}}\left((x^2+1)(n+1) - 2nx(x+1) + (n-1)(x+1)^2\right) \\ &= \frac{n!(-1)^n}{(x+1)^{n+2}}(-2x+2n). \end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{n!(-1)^n}{(x+1)^{n+2}}(2n-2x).}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.20

1. $(1+x^2)f'(x) = xf(x)$.
2. Dériver n fois l'égalité précédente en utilisant la $\boxed{\text{formule de Leibniz.}}$
3. Évaluer la formule de la question 2 en $x=0$. On obtient :

$$f^{(n+2)}(0) + (n^2-1)f^{(n)}(0) = 0.$$

   Ainsi, si $f^{(n)}(0) = 0$ et $n^2-1 \neq 0$ *i.e.* $n \neq 1$ alors $f^{(n+2)}(0) = 0$.
   Le calcul direct donne par ailleurs : $f'(0) = 0$ et $f'''(0) = 0$.
   D'où le résultat $f^{(n)}(0) = 0$ par récurrence sur les entiers impairs à partir de 3.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.22

D'après la formule de Leibniz on a :

$$\left(x^n e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+1)} = \left(x\times x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+1)} = x\left(\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}\right)' + (n+1)\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}.$$

On montre alors la relation par récurrence sur n.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.23

Généralise l'exercice précédent en remplaçant exp par f. Se traite par la même méthode.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.25

Utiliser l'écriture :

$$f(x) = \mathrm{Im}\left(e^{\sqrt{3}x}e^{ix}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{(\sqrt{3}+i)x}\right).$$

D'où :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \mathrm{Im}\left((\sqrt{3}+i)^n e^{(\sqrt{3}+i)x}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(2^n e^{i\frac{n\pi}{6}} e^{(\sqrt{3}+i)x}\right) \\ &= 2^n\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{n\pi}{6}+(\sqrt{3}+i)x}\right) \\ &= 2^n e^{\sqrt{3}x}\sin\left(\frac{n\pi}{6}+x\right) \\ f^{(n)}(0) &= 2^n\sin\frac{n\pi}{6} \end{aligned}$$

Autre méthode, plus longue : utiliser la formule de Leibniz.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.26

Utiliser l'exponentielle des nombres complexes comme à l'exercice précédent.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.29

1. **Expression de $f^{(n)}$:**

   Soit (P_n) la suite de polynômes définie par récurrence par :

   $$P_0 = 1 \text{ et } P_{n+1} = (X^2+1)P_n' - (2n+1)XP_n.$$

   Montrons par récurrence sur $n \geqslant 0$ la relation $R(n)$ suivante :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+n}}.$$

   – La relation $R(0)$ signifie que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, donc elle est vraie.
   – Si $R(n)$ est vraie on a :

   $$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &= \left(\frac{P_n(x)}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+n}}\right)' \text{ d'après } R(n) \\ &= \frac{(x^2+1)P_n'(x) - (2n+1)xP_n(x)}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+n+1}} \\ &= \frac{P_{n+1}(x)}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+n+1}}, \end{aligned}$$

   d'après la définition des polynômes P_n. Donc la relation $R(n+1)$ est vraie.

2. **Relation entre P_{n-1}, P_n et P_{n+1} :**

   Un calcul direct donne $\boxed{(1+x^2)f'(x) = -xf(x).}$

   Or d'après la $\boxed{\text{formule de Leibniz,}}$ la dérivée n^{e} de chacun des deux membres vaut :

   $$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}\left((1+x^2)f'(x)\right) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)}(x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(1+x^2) \\ &= (1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + 2\frac{n(n-1)}{2}f^{(n-1)}(x) \\ \frac{d^n}{dx^n}\left(-xf(x)\right) &= -xf^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

   On trouve ainsi :

   $$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = -xf^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x),$$

   $$\Leftrightarrow (1+x^2)f^{(n+1)}(x) + (2n+1)xf^{(n)}(x) + n^2 f^{(n-1)}(x) = 0,$$

   $$\Leftrightarrow (1+x^2)\frac{P_{n+1}(x)}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+n+1}} + (2n+1)x\frac{P_n(x)}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+n}} + n^2\frac{P_{n-1}(x)}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+n-1}} = 0,$$

   soit, finalement, en simplifiant par $(x^2+1)^{\frac{1}{2}+n}$: $\boxed{P_{n+1} + (2n+1)XP_n + n^2(X^2+1)P_{n-1} = 0.}$

3. **Relation $P'_n = -n^2 P_{n-1}$:**
En additionnant la relation de la question 1 :

$$-P_{n+1} + (X^2+1)P'_n - (2n+1)XP_n = 0$$

et celle de la question 2 :

$$P_{n+1} + (2n+1)XP_n + n^2(X^2+1)P_{n-1} = 0,$$

après simplification on trouve : $(X^2+1)(P'_n + n^2 P_{n-1}) = 0$.
Or un produit de polynômes est nul si et seulement si l'un des polynômes est le polynôme nul, donc $P'_n + n^2 P_{n-1} = 0$.

4. **Calcul de $P_n(0)$:**
La relation de la question 2, évaluée en 0 donne : $P_{n+1}(0) + n^2 P_{n-1}(0) = 0$,
soit : $\boxed{P_{n+1}(0) = -n^2 P_{n-1}(0).}$
Ainsi les nombres recherchés vérifient une relation de récurrence de deux en deux. On distingue donc ce qui se passe pour les entiers pairs et impairs :
– Pour tout q on a : $P_{2q+3}(0) = -(2q+2)^2 P_{2q+1}(0)$, donc :

$$P_{2q+1}(0) = P_1(0)\prod_{i=0}^{q} -(2i)^2.$$

Or D'après la question 1 : $P_1 = (1+X^2)P'_0 - XP_0 = X$.
Donc $P_1(0) = 0$. Donc $\boxed{P_{2q+1}(0) = 0.}$
– Pour tout q on a : $P_{2q+2}(0) = -(2q+1)^2 P_{2q}(0)$, donc :

$$P_{2q}(0) = P_0(0)\prod_{i=1}^{q} -(2i-1)^2 = (-1)^q\left(\prod_{i=1}^{q} 2i-1\right)^2 = (-1)^q\left(\frac{(2q)!}{2^q q!}\right)^2.$$

Ainsi $\boxed{P_{2q}(0) = (-1)^q\left(\frac{(2q)!}{2^q q!}\right)^2.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.30

Soit la suite de polynômes (P_n) définie par :

$$P_1 = 1 + X^2 \text{ et } P_{n+1} = (X^2+1)P'_n \qquad (*)$$

Montrons $\boxed{\text{par récurrence}}$ sur $n \geqslant 1$ la relation $\mathcal{R}(n)$ suivante : $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$
– *Cas $n = 1$:* on a bien :

$$P_1(\tan(x)) = 1 + \tan^2(x) = \tan'(x) = \tan^{(1)}(x).$$

– $\mathcal{R}(n) \Rightarrow \mathcal{R}(n+1)$: si on suppose que $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$ alors :

$$\begin{aligned}
\tan^{(n+1)}(x) &= \left(\tan^{(n)}\right)'(x)\\
&= (P_n \circ \tan))'(x)\\
&= \tan'(x)P'_n(\tan(x))\\
&= (1+\tan^2(x))P'_n(\tan(x))\\
&= P_{n+1}(\tan(x))
\end{aligned}$$

On prouve que $\boxed{\deg(P_n) = n+1}$ par une récurrence évidente sur $n \geqslant 1$ en utilisant la relation $(*)$.

Solution de l'exercice 6.32

1. **Calcul de f' et f'' :**
   Rappelons les formules de dérivation de l'inverse d'un fonction dérivable non nulle et d'un quotient de fonctions dérivables :
$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \text{ et } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}.$$
   On obtient donc :
$$\boxed{f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}}$$
   Puis
$$f''(x) = \frac{(\cos^2 x)(\cos x) - (\sin x)(-2\sin x \cos x)}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x},$$
   soit :
$$\boxed{f''(x) = \frac{\sin^2 x + 1}{\cos^3 x}.}$$
2. **Existence des polynômes P_n :**
   Montrons par récurrence sur $n \geqslant 0$ la propriété $\mathcal{R}(n)$ suivante :
   "il existe un polynôme P_n tel que, pour tout x : $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$."
   - D'après la question précédente les relations $\mathcal{R}(0)$, $\mathcal{R}(1)$, $\mathcal{R}(2)$ sont vraies avec :
$$\boxed{P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2 + 1.}$$
   - Vérifions que, si la relation $\mathcal{R}(n)$ est vraie, alors la relation $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie. Pour tout x, on a :
$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &= \left(\frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}\right)' \\ &= \frac{(\cos x)^{n+1}\left[\cos x P_n'(\sin x)\right] - P_n(\sin x)\left[(n+1)(-\sin x)\cos^n x\right]}{(\cos x)^{2(n+1)}} \\ &= \frac{\cos^2 x P_n'(\sin x) + (n+1)\sin x P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} \\ &= \frac{(1-\sin^2 x)P_n'(\sin x) + (n+1)\sin x P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} \\ &= \frac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}, \end{aligned}$$
     si l'on prend
$$\boxed{P_{n+1} = (1 - X^2)P_n' + (n+1)XP_n.}$$
     n.b. : comme P_n est un polynôme, cette relation assure que P_{n+1} est bien un polynôme.
3. **Monôme de plus haut degré de P_n :**
   Montrons $\boxed{\text{par récurrence}}$ sur $n \geqslant 0$ que $\boxed{P_n \text{ est de degré } n}$:
   - Ceci est vrai pour $n = 0, 1, 2$ comme on vient de le voir

– Supposons que P_n soit de degré n. Alors on peut écrire :

$$P_n = a_n X^n + b_n X^{n-1} + \cdots + +y_n X + z_n \text{ avec } a_n \neq 0.$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n \\
&= (1-X^2)(na_nX^{n-1} + (n-1)b_nX^{n-2} + \cdots + y_n) \\
&\quad +(n+1)X(a_nX^n + b_nX^{n-1} + \cdots + +y_nX + z_n) \\
&= (na_nX^{n-1} + (n-1)b_nX^{n-2} + \cdots + y_n) \\
&\quad \underline{-na_nX^{n+1}} - X^2((n-1)b_nX^{n-2} + \cdots + y_nX + z_n) \\
&\quad \underline{+(n+1)a_nX^{n+1}} + (n+1)X(b_nX^{n-1} + \cdots + +y_nX + z_n) \\
&= (-na_n + (n+1)a_n)X^{n+1} + \cdots \\
&= a_nX^{n+1} + \underbrace{\cdots}_{deg \leqslant n}
\end{aligned}$$

Comme $a_n \neq 0$ on voit donc que P_{n+1} est bien de degré $n+1$.
On remarque de plus que le coefficient du monôme de plus haut degré de P_n est le même que celui du monôme de plus haut degré de P_{n+1} *i.e.* $\boxed{a_{n+1} = a_n}$. Comme $\boxed{a_0 = 1}$ puisque $P_0 = 1$, on déduit immédiatement que $a_n = 1$ pour tout n. Finalement il s'ensuit que :

$$\boxed{\text{le monôme de plus haut degré de } P_n \text{ est } X^n.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.38

1. $\ln(e^3) = 3$.
2. $(\ln e)^3 = 1$
3. $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2}$.
4. $\ln(e^2\sqrt{e}) = \dfrac{5}{2}$.
5. $\ln(\sqrt[3]{e}) = \dfrac{1}{3}$.
6. $e^{\ln 2} = 2$.
7. $e^{\ln 3 - 2\ln 2} = \dfrac{3}{4}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.41

1. **Résolution de** $(x^2-1)e^{\ln(x-2)} = \ln e^{x+1}$ **:**
L'équation est définie seulement pour $x > 2$. Elle est alors équivalente à :

$$(x^2-1)(x-2) = x+1, \text{ soit } (x^2-3x+1)(x+1) = 0 \text{ soit } x = -1 \text{ ou } x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Compte-tenu de la restriction de définition il y a donc une seule solution $\boxed{x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}.}$

3. On trouve une seule solution : $\boxed{x = 3.}$
5. On trouve deux solutions $\boxed{x = 0 \text{ ou } x = 2.}$

6. On trouve deux familles de solutions :

$$\boxed{x = e^{\frac{7\pi}{24}+k\pi} \text{ ou } x = e^{\frac{\pi}{24}+k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

7. **Résolution de l'équation** $e^{2x+1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^3 = 0.$ **:**

   D'après les propriétés des puissances l'équation s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}
& e\left(e^x\right)^2 - e^{x+1} - 2e^3 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \left(e^x\right)^2 - e^x - 2e^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} y = e^x \\ y^2 - y - 2e^2 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} y = e^x \\ y = \frac{1+\sqrt{1+8e^8}}{2} \text{ ou } y = \frac{1-\sqrt{1+8e^8}}{2} \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & e^x = \frac{1+\sqrt{1+8e^8}}{2} \text{ car } \frac{1-\sqrt{1+8e^8}}{2} \leqslant 0
\end{aligned}$$

   donc finalement la seule solution est : $\boxed{x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+8e^8}}{2}\right).}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.45

1. $f'(x) = 1 + \ln(x)$.

2. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

3. $f'(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

4. **Dérivée de** $f(x) = \dfrac{1}{16}\left(\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - \dfrac{2x(x^2+1)}{x^2-1}\right)$ **:**

   D'après les règles de calcul sur les dérivées, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' &= \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} \\
&= -\frac{2}{(x-1)^2} \\
\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)' &= -\frac{2}{(x-1)^2}\,\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \\
&= -\frac{2}{(x-1)(x+1)} \\
&= -\frac{2}{x^2-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2x^3+2x}{x^2-1}\right)' &= \frac{(6x^2+2)(x^2-1)-2x(2x^3+2x)}{(x^2-1)^2}\\
&= \frac{2x^4-8x^2-2}{(x^2-1)^2}\\
i'(x) &= \frac{1}{16}\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\frac{2x^3+2x}{x^2-1}\right)'\\
&= \frac{1}{16}\left(-\frac{2}{x^2-1}-\frac{2x^4-8x^2-2}{(x^2-1)^2}\right)\\
&= \frac{1}{8(x^2-1)^2}\left(-(x^2-1)-(x^4-4x^2-1)\right)\\
&= \boxed{-\frac{x^4-3x^2-2}{8(x^2-1)^2}.}
\end{aligned}$$

5. $f'(x)=e^{x+e^x}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.49

$$\boxed{A=\ln x \text{ et } B=\frac{x^{\frac{67}{24}}}{\sqrt{2}}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.50

1. Pour $x>0$ on écrit : $x^{\sqrt{x}}=e^{\sqrt{x}\ln x}$ et $\sqrt{x}^x=e^{x\ln\sqrt{x}}=e^{\frac{x}{2}\ln x}$.
   L'équation se ramène donc à : $\sqrt{x}\ln x=\dfrac{x}{2}\ln x$,
   soit : $\ln x=0$ ou $\sqrt{x}=\dfrac{x}{2}$. Il y a donc trois solutions : $\boxed{0,1,4.}$
   N.B. : la solution $x=0$ qui devrait être exclue puisqu'on se place au début dans le cas où $x>0$ peut être conservée néanmoins si on accepte de donner un sens à 0^0 ($x^{\sqrt{x}}$ et $\sqrt{x}^x$ pour $x=0$).
2. **Résolution de l'équation $4^x-3\times 2^{x+2}=2^6$:**
   On a :

$$\begin{aligned}
& 4^x-3\times 2^{x+2}=2^6\\
\Leftrightarrow\ & (2^2)^x-3\times 2^2\times 2^x-2^6=0\\
\Leftrightarrow\ & (2^x)^2-12\times 2^x-2^6=0\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} y=2^x\\ y^2-12y-2^6=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} y=2^x\\ y=16 \text{ ou } y=-4\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & 2^x=16
\end{aligned}$$

   donc finalement la seule solution est : $\boxed{x=4.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.53

D'après la formule de dérivation : $(\ln|f|)'=\frac{f'}{f}$
on a : $\boxed{f'=f\times(\ln|f|)'.}$

3. **Dérivée de** $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{\sin x}}{(x^3-1)^{\frac{1}{3}}\ln x}$. **:**
   Dans le cas présent on a, pour tout x tel que $f(x)$ est défini :
   $$\ln|f|(x) = 2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(\sin x) - \frac{1}{3}\ln|x^3-1| - \ln|\ln x|.$$
   D'où :
   $$(\ln|f|)'(x) = \frac{2}{x} + \frac{\cos x}{2\sin x} - \frac{x^2}{x^3-1} - \frac{1}{x\ln x}.$$
   D'où :
   $$\boxed{f'(x) = \left(\frac{2}{x} + \frac{\cos x}{2\sin x} - \frac{x^2}{x^3-1} - \frac{1}{x\ln x}\right)\frac{x^2\sqrt{\sin x}}{(x^3-1)^{\frac{1}{3}}\ln x}.}$$

Solution de l'exercice 6.64

C'est $4 + \displaystyle\int_1^x x^3 - x^2 + 2x - 1\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + \frac{49}{12}$.

Solution de l'exercice 6.65

On trouve : $\boxed{f' = 0}$ donc, comme f est définie sur un intervalle (*i.e.* $\mathbb{R}$) et que $f(0) = 1$, on déduit que $\boxed{f = 1.}$

Autre méthode : on peut obtenir le même résultat par linéarisation de f.

Solution de l'exercice 6.66

1. **Si** $f = \lambda g$ $(\lambda \in \mathbb{K})$ **alors** $\dfrac{f}{g} = \dfrac{f'}{g'}$ **:**
   En effet en dérivant on a : $f' = \lambda g'$ d'où $\lambda = \dfrac{f}{g} = \dfrac{f'}{g'}$.
2. **Si** $\dfrac{f}{g} = \dfrac{f'}{g'}$ **alors il existe** $\lambda \in \mathbb{K}$ **tel que** $f = \lambda g$ **:**
   En effet :
   $$\frac{f}{g} = \frac{f'}{g'} \Leftrightarrow \frac{f'}{g'} - \frac{f}{g} = 0 \Leftrightarrow \frac{f'g - fg'}{gg'} = 0 \Leftrightarrow f'g - fg' = 0 \Leftrightarrow \frac{f'g - fg'}{g^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = 0$$
   Comme la fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie et dérivable sur un $\boxed{\text{intervalle}}$ on en déduit que $\dfrac{f}{g}$ est une fonction constante *i.e.* :
   $$\exists\lambda \in \mathbb{K},\ \frac{f}{g} = \lambda,$$
   d'où le résultat.

Solution de l'exercice 6.70

1. **Primitive de** f **:**
   On a :
   $$f(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-1} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$
   Donc :
   $$\boxed{\int f(x)\,dx = \ln\left|x^2-1\right| + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \ln\left|\frac{(x-1)^2}{x+1}\right|.}$$

2. **Primitive de g :**
   On a :
   $$g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right).$$
   Donc :
   $$\boxed{\int g(x)\,dx = \ln\left(|x-1|^{\frac{5}{3}}\,|x+1|^{\frac{1}{3}}\right).}$$
3. **Primitive de h :**
   On a :
   $$h(x) = \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x-+1} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$
   Donc :
   $$\boxed{\int h(x)\,dx = \ln|x+1| - \frac{1}{x+1}.}$$
6. **Primitive de k :**
   $$\boxed{\int h(x)\,dx = \ln(x^2+x+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).}$$

Solution de l'exercice 6.72

On trouve :
1. $f(x) = \dfrac{-2}{x+2} + \dfrac{2x}{x^2+1}$.
2. $\displaystyle\int f(x)\,dx = \ln\left(\frac{x^2+1}{(x+2)^2}\right)$.

Solution de l'exercice 6.74

1. **P a une racine double :**
   Comme : $P'' = 12X^2 + 6X + \frac{1}{2}$,
   On a :
   $$P''(x_0) = \frac{13}{2} \Leftrightarrow 12x_0^2 + 6x_0 - 6 = 0.$$
   Cette équation du second degré admet deux racines réelles $\frac{1}{2}$ et -1. Le calcul montre que :
   $$P\left(\frac{1}{2}\right) = P'\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$
   Donc $\boxed{x_0 = \frac{1}{2}}$ est une racine double de P.
2. **Factorisation de P :**
   Comme x_0 est une racine double de P, on peut factoriser P par $(X - x_0)^2$. Pour ce faire on peut chercher, par identification des coefficients de deux polynômes égaux, les coefficients inconnus α, β, γ tels que :
   $$(\alpha X^2 + \beta X + \gamma)\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 = P.$$
   Après calculs on trouve : $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 2)$. Comme le polynôme $X^2 + 2X + 2$ n'a pas de racine réelle la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est :
   $$\boxed{P = (X^2 + 2X + 2)\left(X - \frac{1}{2}\right)^2.}$$

3. **Existence de a, b, c :**
   Pour tout $x \neq \frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{ax}{x^2+2x+2}+\frac{b}{x-x_0}+\frac{c}{(x-x_0)^2} &= \frac{(x-x_0)^2 ax+(x^2+2x+2)(b(x-x_0)+c)}{(x^2+2x+2)(x-x_0)^2} \\
&= \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 ax+(x^2+2x+2)\left(b\left(x-\frac{1}{2}\right)a+c\right)}{P(x)} \\
&= \frac{ax^3+\left(-a+\frac{3}{2}b+c\right)x^2+\left(\frac{a}{4}+b+2c\right)x+(2c-b)}{P(x)}
\end{aligned}$$

   Pour avoir l'égalité demandée <u>il suffit</u> donc que :

$$\left\{\begin{array}{rcll} a+b &=& 1 & L_1 \\ -a+\frac{3}{2}b+c &=& 0 & L_2 \\ \frac{a}{4}+b+2c &=& \frac{9}{4} & L_3 \\ -b+2c &=& 2 & L_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} a+b &=& 1 & L_1 \\ \frac{5}{2}b+c &=& 1 & L_2+L_1 \\ \frac{3}{4}b+2c &=& 2 & L_3-\frac{1}{4}L_1 \\ -b+2c &=& 2 & L_4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} a+b &=& 1 & L_1 \\ -b+2c &=& 2 & L_4 \\ \frac{7}{4}b &=& 0 & L_3-\frac{1}{4}L_1-L_4 \\ 3b &=& 0 & L_2+L_1-\frac{1}{2}L_4 \end{array}\right.$$

   Soit $\boxed{(a,b,c)=(1,0,1)}$.

4. **Une primitive de i :**
   D'après la question précédente, on a :

$$i(x)=\frac{x}{x^2+2x+2}+\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{(x+1)^2+1}+\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2},$$

   d'où

$$\boxed{\int i(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|-\arctan(x+1)-\frac{1}{x-\frac{1}{2}}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.75

On rappelle la formule de sommation des termes d'une suite géométrique de raison x, pour $p \leqslant n$:

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{x^p-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n-p+1 & \text{si } x=1 \end{cases}}$$

Ainsi

$$h(x)=x^{10}+x^{11}+\cdots+x^{19},$$

admet pour primitive

$$\boxed{\int h(x)\,dx=\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^{12}}{12}+\cdots+\frac{x^{20}}{20}.}$$

Solution de l'exercice 6.78

1. $\displaystyle\int (2x+1)(x^2+x+1)^2\,dx = \frac{(x^2+x+1)^3}{3}.$
2. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{\sqrt{x^3-3x+1}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3-3x+1}.$
3. $\displaystyle\int (x+3)^2(x^2+1)^2\,dx = \frac{x^7}{7}+x^6+\frac{11x^5}{5}+3x^4+\frac{19x^3}{3}+3x^2+9x.$
5. $\displaystyle\int \frac{2x^2-x-1}{(4x^3-3x^2-6x+11)^5}\,dx = -\frac{1}{24(4x^3-3x^2-6x+11)^4}.$
6. $\displaystyle\int \frac{x^5}{1+x^6}\,dx = \frac{1}{6}\ln(1+x^6).$
7. **Une primitive de la fonction $\dfrac{1}{x\ln|x|}$:**

   Comme la dérivée de la fonction $\ln|x|$ est la fonction $\frac{1}{x}$ on reconnaît une fonction de la forme $\dfrac{f'}{f}$. Donc finalement :
   $$\boxed{\int \frac{1}{x\ln|x|}\,dx = \ln|\ln|x||.}$$
8. $\displaystyle\int e^x\sin(e^x)\,dx = -\cos(e^x).$
9. **Une primitive de la fonction $\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$:**
   Comme la dérivée de la fonction $f=\ln x$ est la fonction $\frac{1}{x}$ on reconnaît une fonction de la forme $f'\sqrt{1+f}$. Or une primitive de la fonction $y\longmapsto\sqrt{1+y}$ est $y\longmapsto\frac{2}{3}\sqrt{(1+y)^3}$. donc finalement
   $$\boxed{\int \frac{\sqrt{1+\ln(x)}}{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}.}$$
10. $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx = \ln(e^x+e^{-x}).$
11. **Une primitive de la fonction $\dfrac{\cos(x)}{a^2+\sin^2 x}$:**
    La dérivée de $f=\sin$ est $\cos$. Donc on reconnaît une fonction de la forme $f'\times\frac{1}{a^2+f^2}$. Comme :
    $$\int \frac{1}{a^2+y^2}dy = \begin{cases} \frac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{y}{a}\right) & \text{si } a\neq 0\\ -\dfrac{1}{y} & \text{si } a=0\end{cases}$$
    on trouve :
    $$\boxed{\int \frac{\cos(x)}{a^2+\sin^2 x}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{\sin x}{a}\right) & \text{si } a\neq 0\\ -\dfrac{1}{\sin x} & \text{si } a=0.\end{cases}}$$
12. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{2-\cos x}\,dx = \ln|2-\cos x|.$

13. **Une primitive de la fonction $\dfrac{3\sin x}{2(\cos x+1)}$:**

    La dérivée de $f = \cos$ est $-\sin$. Donc on reconnaît une fonction de la forme $f' \times \left(-\frac{3}{2(f+1)}\right)$. Comme :

$$\int -\frac{3}{2(y+1)}dy = -\frac{3}{2}\ln|y+1|$$

    on trouve :

$$\boxed{\int \frac{3\sin x}{2(\cos x+1)}\,dx = -\frac{3}{2}\ln|\cos x+1|.}$$

14. **Une primitive de la fonction 2^{3x+4} :**

    On remarque que $2^{3x+1} = e^{3\ln 2x+\ln 2}$. Comme

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b},$$

    on trouve :

$$\boxed{\int 2^{3x+1}\,dx = \frac{1}{3\ln 2}2^{3x+1}.}$$

15. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \frac{1}{2\cos^2 x}$.
16. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx = \sin(\ln x)$.
17. $\displaystyle\int \frac{\sin(\arctan x)}{1+x^2}\,dx = -\cos(\arctan x)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.79

$$\int x^{n-1}\ln x\,dx = \frac{1}{n}x^n\ln x - \frac{x^2}{n^2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.81

On rappelle la formule de Leibniz de dérivation n^{e} du produit de deux fonctions u et v dérivables n fois :

$$\boxed{(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.}$$

$\boxed{\text{On reconnaît}}$ alors que g est de cette forme :

$$g(x) = x^2e^x + C_n^1(x^2)'e^x + C_n^2(x^2)''e^x = \left(x^2e^x\right)^{(n)}.$$

Comme $n \geqslant 1$, une primitive est donc donnée par $\left(x^2e^x\right)^{(n-1)}$, soit :

$$\boxed{\int g(x)\,dx = \left(x^2e^x\right)^{(n-1)} = x^2e^x + 2(n-1)xe^x + (n-1)(n-2)e^x.}$$

Solution de l'exercice 6.82

4. **Une primitive de la fonction** $\sin x \cos^2 x$ **:**

$\boxed{\text{On peut linéariser}}$ la fonction :

$$\begin{aligned}
\sin x \cos^2 x &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{8i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(e^{i2x}+2+e^{-i2x}\right) \\
&= \frac{1}{8i}\left(e^{3ix}+e^{ix}-e^{-ix}-e^{-3ix}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\sin 3x+\sin x\right) \\
\int \sin x \cos^2 x\, dx &= \boxed{-\frac{\cos 3x}{12}-\frac{\cos x}{4}.}
\end{aligned}$$

Autre méthode : on peut aussi faire le changement de variable $u = \cos x$. On trouve :

$$\int \sin x \cos^2 x\, dx = -\frac{\cos^3 x}{3}.$$

En linéarisant ce résultat on retrouve bien le résultat trouvé par l'autre méthode .

5. **Une primitive de la fonction** $\cos(2x)e^{3x}$ **:**

On utilise la formule d'Euler, de manière analogue au cas précédent :

$$\begin{aligned}
\cos(2x)e^{3x} &= \left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}\right)e^{3x} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{i2x+3x}+e^{3x-i2x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{(i2+3)x}+e^{(3-i2)x}\right) \\
\int \cos(2x)e^{3x}dx &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(i2+3)x}}{i2+3}+\frac{e^{(3-i2)x}}{-i2+3}\right) \\
&= \frac{(-i2+3)e^{(i2+3)x}+(i2+3)e^{(3-i2)x}}{2|i2+3|^2} \\
&= \frac{e^{3x}}{26}\left((-i2+3)e^{i2x}+(i2+3)e^{-i2x}\right) \\
&= \frac{e^{3x}}{26}\left(3(e^{i2x}+e^{-i2x})+2i(e^{-i2x}-e^{i2x})\right) \\
&= \boxed{\frac{e^{3x}}{13}\left(3\cos 2x+2\sin 2x\right).}
\end{aligned}$$

6. **Une primitive de la fonction** f **:**

$\boxed{\text{On linéarise}}$ l'expression de f :

$$\begin{aligned}
\sin^4 x \cos^2 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2^6}\left(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right) \\
&= \frac{1}{2^6}\left(e^{6ix}-2e^{4ix}-e^{2ix}+4-e^{-2ix}-2e^{-4ix}+e^{-6ix}\right) \\
&= \frac{1}{2^5}\left(\cos 6x-2\cos 4x-\cos 2x+2\right) \\
\int f(x)\,dx &= \boxed{\frac{1}{2^5}\left(\frac{\sin 6x}{6}-\frac{\sin 4x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}+2x\right)}
\end{aligned}$$

7. **Une primitive de la fonction $x^2+e^x\cos x$:**
On a :

$$\begin{aligned}
\int x^2+e^x\cos x\,dx &= \frac{x^3}{3}+\int e^x\cos x\,dx \\
&= \frac{x^3}{3}+\int e^x\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\,dx \qquad \text{d'après les formules d'Euler} \\
&= \frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\int e^{(i+1)x}+e^{(1-i)x}\,dx \\
&= \frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{(i+1)x}}{i+1}+\frac{e^{(1-i)x}}{i-1}\right) \\
&= \frac{x^3}{3}+\frac{e^x}{2}\left(\frac{e^{ix}}{i+1}+\frac{e^{-ix}}{1-i}\right) \\
&= \frac{x^3}{3}+\frac{e^x}{2}\frac{(1-i)e^{ix}+(1+i)e^{-ix}}{2} \\
&= \boxed{\frac{x^3}{3}+\frac{e^x}{2}\left(\cos x+\sin x\right)}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6.83

1. **Une primitive de la fonction $\frac{x^2+1}{x^3}$:**

$$\frac{x^2+1}{x^3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3},$$

donc

$$\boxed{\int \frac{x^2+1}{x^3}\,dx=\ln|x|-\frac{1}{2x^2}.}$$

2. **Une primitive de la fonction $\frac{x^3+3x+x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$:**
On remarque que :

$$\boxed{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.}$$

On transforme alors l'expression :

$$\begin{aligned}
\frac{x^3+3x+x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+3\right)+x \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\left(\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2+2\right)+x \\
&= f'(x)(f^2(x)+2)+x \quad \text{avec } f(x)=\sqrt{x^2+1} \\
\int \frac{x^3+3x+x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \frac{f^3}{3}+2f+\frac{x^2}{2} \\
&= \boxed{(x^2+3)\sqrt{x^2+1}+\tfrac{x^2}{2}.}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6.84

1. $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=-\dfrac{1}{2}$.
2. $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x|$.

Solution de l'exercice 6.85

1. **Calcul de F_1 et F_2 :**

   On a :

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \int_0^x \tan t\,dt \\
&= \int_0^x \frac{\sin t}{\cos t}\,dt \\
&= \int_0^x -\frac{\cos'(t)}{\cos t}\,dt \\
&= [-\ln|\cos t|]_{t=0}^{t=x} \\
&= -\ln|\cos x| \\
&= \boxed{-\ln(\cos x)} \qquad \text{car } x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{ donc } \cos x>0. \\
F_2(x) &= \int_0^x \tan^2 t\,dt \\
&= \int_0^x \tan' t-1\,dt \qquad \text{car } \boxed{\tan'=1+\tan^2} \\
&= [\tan t-t]_{t=0}^{t=x} \\
&= \boxed{\tan x-x} \qquad \text{car } \tan(0)=0.
\end{aligned}$$

2. **Relation entre F_n et F_{n+2} :**

On a :

$$\begin{aligned}
F_{n+2}(x)+F_n(x) &= \int_0^x \tan^{n+2} t+\tan^n t\,dt \\
&= \int_0^x \tan^n t(1+\tan^2 t)\,dt \\
&= \int_0^x \tan^n t\tan' t\,dt \\
&= \left[\frac{\tan^{n+1} t}{n+1}\right]_{t=0}^{t=x} \\
&= \frac{\tan^{n+1} x}{n+1}
\end{aligned}$$

3. **Calcul de F_4 :**
D'après la question précédente, pour $n=2$, on a :

$$\begin{aligned}
F_4(x) &= \frac{\tan^3 x}{3}-F_2(x) \\
&= \frac{\tan^3 x}{3}-(\tan x-x) \qquad (\text{ d'après 1.}) \\
&= \boxed{\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x}
\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.86

1. $\displaystyle\int x^2e^x\,dx=(x^2-2x+1)e^x$.
2. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2}=-\frac{1}{x}\arctan x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
3. **Une primitive de la fonction $\dfrac{2x\ln|x|}{(1+x^2)^2}$:**

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\ln|x|}_{=v(x)}\times\underbrace{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}_{=u'(x)}\,dx &= \ln x\underbrace{\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)}_{=u(x)}-\int -\frac{1}{x(x^2+1)}\,dx \\
&= -\frac{\ln|x|}{x^2+1}+\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx \\
&= -\frac{\ln|x|}{x^2+1}+\int \frac{(x^2+1)-x^2}{x(x^2+1)}\,dx \\
&= -\frac{\ln|x|}{x^2+1}+\int \frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\,dx \\
&= -\frac{\ln|x|}{x^2+1}+\ln x-\ln(x^2+1).
\end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx=x\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\sqrt{x^2-1}$.
8. $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\,dx=(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.87

Si $f(x) = \left(x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_m\right) e^x$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}x + a_m\right) e^x \\ &\quad + \left(m x^{m-1} + (m-1)a_1 x^{m-2} + (m-2)a_2 x^{m-3} + \cdots + a_{m-1}\right) e^x \\ &= \left(x^m + (a_1+m)x^{m-1} + (a_2 + (m-1)a_1)x^{m-2} + \cdots + (a_m + a_{m-1})\right) e^x \end{aligned}$$

Cherchons $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de sorte que : $f'(x) = x^m e^x$
Comme $e^x \neq 0$ c'est équivalent à :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^m + (a_1+m)x^{m-1} + (a_2 + (m-1)a_1)x^{m-2} + \cdots + (a_m + a_{m-1}) = x^m.$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coefficients soit ici :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1 + m &=& 0 \\ a_2 + (m-1)a_1 &=& 0 \\ &\vdots& \\ a_p + (m-p+1)a_{p-1} &=& 0 \\ &\vdots& \\ a_m + a_{m-1} &=& 0 \end{array}\right.$$

C'est visiblement un système de Cramer. On obtient simplement la solution du système l'écrivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1 &=& -m \\ a_2 &=& -(m-1)a_1 \\ &\vdots& \\ a_p &=& -(m-p+1)a_{p-1} \\ &\vdots& \\ a_m &=& -a_{m-1} \end{array}\right.$$

puis en multipliant entre elles les p première lignes :

$$a_1 a_2 \cdots a_{p-1} a_p = (-1)^p m(m-1)(m-2)\cdots(m-p+1) a_1 a_2 \cdots a_{p-1},$$

d'où en simplifiant par $a_1 a_2 \cdots a_{p-1}$:

$$a_p = (-1)^p m(m-1)(m-2)\cdots(m-p+1) = \frac{(-1)^p m!}{(m-p)!}.$$

Finalement on obtient le formule :

$$\boxed{\int x^m e^x\,dx = \left(x^m - m x^{m-1} + m(m-1)x^{m-2} + \cdots + (-1)^m m!\right) e^x = e^x \left(x^m + \sum_{p=1}^{m} \frac{(-1)^p m!}{(m-p)!} x^{m-p}\right).}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.88

1. **Une primitive de $x^n \ln x$:**

En faisant une intégration par parties on a :

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x^n}_{=u'(x)} \underbrace{\ln x}_{=v(x)} \, dx &= \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{=u(x)} \underbrace{\ln x}_{=v(x)} - \int \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{=u(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{=v'(x)} \, dx \\
&= \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx \\
&= \boxed{\frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.}
\end{aligned}$$

n.b. on retrouve le résultat de l'exercice6.79.

2. **Une primitive de $x^n(\ln x)^2$:**
En faisant une intégration par parties on a :

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x^n}_{=u'(x)} \underbrace{(\ln x)^2}_{=v(x)} \, dx &= \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{=u(x)} \underbrace{(\ln x)^2}_{=v(x)} - \int \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{=u(x)} \underbrace{\frac{2 \ln x}{x}}_{=v'(x)} \, dx \\
&= \frac{x^{n+1} \ln^2 x}{n+1} - \frac{2}{n+1} \int x^n \ln x, dx \\
&= \boxed{\frac{x^{n+1} \ln^2 x}{n+1} - \frac{2x^{n+1} \ln x}{(n+1)^2} + \frac{2x^{n+1}}{(n+1)^3}.} \qquad \text{d'après 1.}
\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.89

1. **Relation entre I_n et I_{n+1} :**
À l'aide d'une $\boxed{\text{intégration par parties}}$ cherchons une relation entre des primitives des fonctions $(1-t^2)^{n+1}$ et $(1-t^2)^n$:

$$\begin{aligned}
\int (1-t^2)^{n+1} \, dt &= \int (1-t^2)(1-t^2)^n \, dt \\
&= \int (1-t^2)^n \, dt + \int -t^2(1-t^2)^n \, dt \\
&= \int (1-t^2)^n \, dt + \int \underbrace{\frac{t}{2}}_{=v(t)} \underbrace{-2t(1-t^2)^n}_{=u'(t)} \, dt \\
&= \int (1-t^2)^n \, dt + \left(\underbrace{\frac{t}{2}}_{=v(t)} \times \underbrace{\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1}}_{=u(t)} - \int \underbrace{\frac{1}{2}}_{=v'(t)} \underbrace{\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1}}_{=u(t)} \, dt \right) \\
&= \int (1-t^2)^n \, dt + \frac{t(1-t^2)^{n+1}}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)} \int (1-t^2)^{n+1} \, dt
\end{aligned}$$

donc :

$$\left(1 + \frac{1}{2(n+1)}\right) \int (1-t^2)^{n+1} \, dt = \int (1-t^2)^n \, dt + \frac{t(1-t^2)^{n+1}}{2(n+1)} \qquad (R).$$

Rappelons que, étant donnée n'importe quelle primitive F de f, on a :

$$\int_a^x f(t) \, dt = F(x) - F(a) \text{ (noté : } [F(t)]_{t=a}^{t=x} \text{)}.$$

Donc d'après la relation (R) on a :

$$\left(1+\frac{1}{2(n+1)}\right) I_{n+1} = \left(1+\frac{1}{2(n+1)}\right) \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n+1}\, dt = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\, dt = I_n,$$

puisque la fonction $\frac{t(1-t^2)^{n+1}}{2(n+1)}$ est nulle en 1 et -1. Donc finalement :

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n.}$$

2. **Calcul de I_0 et de I_n :**
On a facilement

$$I_0 = \int_{-1}^{1} 1\, dt = [t]_{t=-1}^{t=1} = 1-(-1) = 2.$$

La relation de récurrence $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ donne alors :

$$I_n = I_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{2i}{2i+1} = 2\frac{\prod_{i=1}^{n}(2i)}{\prod_{i=1}^{n}(2i+1)}.$$

Comme :

$$\prod_{i=1}^{n}(2i) = 2^n n! \text{ et } \prod_{i=1}^{n}(2i+1) = \frac{(2n+1)!}{\prod_{i=1}^{n}(2i)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!},$$

on obtient finalement :

$$\boxed{I_n = 2\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

3. **Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(1)^k}{2k+1} C_n^k$:**
La $\boxed{\text{formule du binôme}}$ donne :

$$(1-t^2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-t^2)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k t^{2k}.$$

Donc une primitive de la fonction $(1-t^2)^n$ est donnée par :

$$\int (1-t^2)^n\, dt = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \int t^{2k}\, dt = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1}.$$

Et donc :

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \left(\frac{1^{2k+1}}{2k+1} - \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}\right) = 2\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \frac{1}{2k+1}.$$

En comparant avec le résultat de la question précédente on trouve que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

Solution de l'exercice 6.91

1. $I_n = \dfrac{2n}{3+2n} I_{n-1}$

Solution de l'exercice 6.92

1. **Calcul de I_0 et I_1 :**
   On a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 t \, dt \\ &= [t]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \\ I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt \\ &= [-\cos t]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 1 \end{aligned}$$

   Soit

$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } I_1 = 1.}$$

2. **Relation $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$:**
   On a :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \sin^2 t \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t (1-\cos^2 t) \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t \, dt \\ &= I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^n t \cos t}_{=u'(t)} \underbrace{\cos t}_{=v(t)} \, dt \qquad \text{(intégration par parties)} \\ &= I_n - \left(\left[\underbrace{\frac{\sin^{n+1} t}{n+1}}_{=u(t)} \underbrace{\cos t}_{=v(t)} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{\sin^{n+1} t}{n+1}}_{=u(t)} \underbrace{(-\sin t)}_{=v'(t)} \, dt \right) \\ &= I_n - \left(0 + \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t \, dt \right) \\ &= I_n - \frac{1}{n+1} I_{n+2}, \end{aligned}$$

   soit :

$$I_{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = I_n,$$

   soit finalement :

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.}$$

3. **Relation** $I_{2p} = \dfrac{\pi(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}$ **:**

   Montrons par récurrence sur $p \geqslant 0$ la relation suivante : $I_{2p} = \dfrac{\pi(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}$.

   – Pour $p = 0$ cette relation s'écrit : $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$,
   donc elle est vraie d'après le calcul effectué à la question n°1.
   – Si la relation est vraie à l'ordre p, alors :

$$\begin{aligned}
I_{2(p+1)} &= I_{2p+2} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} \qquad \text{d'après la question n}^{\text{o}}2. \\
&= \frac{2p+1}{2p+2}\frac{\pi(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2} \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{\pi(2p+1)!(2p+2)}{(2p+2)^2 \times 2^{2p+1}(p!)^2} \qquad \text{en multipliant par : } \frac{2p+2}{2p+2} \\
&= \frac{\pi(2p+2)!}{2^2(p+1)^2 \times 2^{2p+1}(p!)^2} \\
&= \frac{\pi(2p+2)!}{2^{2p+3}((p+1)!)^2}.
\end{aligned}$$

   Donc la relation est vraie à l'ordre $p+1$.

4. **La suite de terme général** $(n+1)I_nI_{n+1}$ **est constante :**

   En effet, $\boxed{\text{la relation trouvée à la question 2}}$ s'écrit aussi

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n,$$

   donc $\boxed{\text{en multipliant par } I_{n+1}}$ on obtient :

$$(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1}.$$

   Si on note $u_n = (n+1)I_nI_{n+1}$, cette dernière relation s'écrit aussi : $u_n = u_{n+1}$. Donc la suite (u_n) est constante. Elle est ainsi égale à son premier terme *i.e.* :

$$\boxed{(n+1)I_nI_{n+1} = I_0I_1 = \frac{\pi}{2}.}$$

5. **Une formule pour** I_{2p+1} **:**

   D'après la question précédente, pour $n = 2p$ on a :

$$(2p+1)I_{2p}I_{2p+1} = \frac{\pi}{2}.$$

   donc :

$$\begin{aligned}
I_{2p+1} &= \frac{\pi}{2(2p+1)I_{2p}} \\
&= \frac{\pi}{2} \times \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{\pi(2p)!(2p+1)} \qquad \text{d'après la question n}^{\text{o}}3. \\
&= \boxed{\frac{(p!)^2 2^{2p}}{(2p+1)!}.}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6.93

2.

$$\boxed{\int \frac{1}{2+\sqrt{x}}\,dx = 4 + 2\sqrt{x} - 4\ln\left(2+\sqrt{x}\right).}$$

3.

$$\boxed{\int \sqrt{e^x - 1}\,dx = 2\sqrt{e^x-1} - 2\arctan\sqrt{e^x-1}.}$$

4.

$$\begin{aligned}
\int e^{2x}\sin e^x\,dx &= \int u\sin u\,du \\
&= -u\cos u + \int \cos u\,du \qquad \text{par intégration par parties} \\
&= -u\cos u - \sin u \\
&= \boxed{-e^x\cos e^x - \sin e^x.}
\end{aligned}$$

6. Comme $dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$ on a :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,dx &= \int \frac{2t^2}{(t^2+1)^2}\,dt \\
&= \int \underbrace{\frac{2t}{(t^2+1)^2}}_{=u'(t)}\underbrace{t}_{=v(t)}\,dt \\
&= \underbrace{\frac{-1}{t^2+1}}_{=u(t)}\underbrace{t}_{=v(t)} - \int \underbrace{\frac{-1}{t^2+1}}_{=u(t)} \times \underbrace{1}_{=v'(t)}\,dt \qquad \text{par intégration par parties} \\
&= -\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{1}{t^2+1}\,dt \\
&= -\frac{t}{t^2+1} + \arctan t \\
&= \boxed{-\frac{\sqrt{x}}{x+1} + \arctan\sqrt{x}.}
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
t = \sqrt{x^2+1} - x \quad &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1-t^2}{2t} \\
dx \quad &= \quad -\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt \\
\sqrt{1+t^2} \quad &= \quad x + t = \frac{1-t^2}{2t} + t = \frac{t^2+1}{2t} \\
\int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx \quad &= \quad -4\int \frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt \\
&= \quad \frac{2}{t^2+1} \\
&= \quad \frac{2}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2+1} \\
&= \quad \frac{1}{x^2+1-x\sqrt{x^2+1}} \\
&= \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\,\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(\sqrt{x^2+1}+\right) \\
&= \quad \boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}
\end{aligned}$$

8.

$$\boxed{\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}.}$$

9.

$$\boxed{\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{\sin x}}{1+\sqrt{\sin x}}\right) - \arctan\sqrt{\sin x}.}$$

10. $\displaystyle\int f(x),\ dx = \arctan(e^x)$.

11. En posant $\alpha = \tan\frac{a}{2}$ on trouve :

$$\frac{dx}{\cos x - \cos a} = -(1+\alpha^2)\frac{dt}{t^2-\alpha^2}.$$

Solution de l'exercice 6.96

1. **f est de classe C^∞ :**

   En effet la fonction S est dérivable puisqu'elle est définie comme la primitive d'une fonction (continue). De plus sa dérivée est donnée par :

$$S'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   D'après les $\boxed{\text{théorèmes de calcul sur les fonctions de classe } \mathrm{C}^\infty,}$ S' est de classe C^∞ sur $]-1,1[$, donc c'est aussi le cas de S, donc de λS (produit par un scalaire). Enfin f apparaît comme la composée des fonctions sin et λS qui sont de classe C^∞, donc c'est une fonction de classe C^∞.

2. **Calcul de a :**

$$\begin{aligned}
S'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
S''(x) &= \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{1-x^2}S'(x)\\
f'(x) &= \lambda S'(x)\cos(\lambda S(x))\\
f''(x) &= \lambda S''(x)\cos(\lambda S(x)) - (\lambda S'(x))^2\sin(\lambda S(x))\\
&= \frac{\lambda x}{1-x^2}S'(x)\cos(\lambda S(x)) - \frac{\lambda^2}{1-x^2}\sin(\lambda S(x))\\
(1-x^2)f''(x) - xf'(x) &= \big(x\lambda S'(x)\cos(\lambda S(x)) - \lambda^2\sin(\lambda S(x))\big) - x\lambda S'(x)\cos(\lambda S(x))\\
&= -\lambda^2\sin(\lambda S(x)\\
&= -\lambda^2 f(x)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + \lambda^2 f(x) = 0.}$$

Ainsi il suffit de prendre $\boxed{a = \lambda^2.}$

3. **Relation entre $f^{(n+2)}$, $f^{(n+1)}$ et $f^{(n)}$:**
On dérive n fois la relation précédente et on utilise la $\boxed{\text{formule de Leibniz}}$:

$$\begin{aligned}
\big((1-x^2)f''(x)\big)^{(n)} &= C_n^0(1-x^2)\,(f''(x))^{(n)} + C_n^1(-2x)\,(f''(x))^{(n-1)}\\
&\quad + C_n^2(-2)\,(f''(x))^{(n-2)}\\
&= (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - 2nxf^{(n+1)}(x) - n(n-1)f^{(n)}(x)\\
(xf'(x))^{(n)} &= C_n^0 x\,(f'(x))^{(n)} + C_n^1\,(f'(x))^{(n-1)}\\
&= xf^{(n+1)} + nf^{(n)}\\
\big((1-x^2)f''(x) - xf'(x) + \lambda^2 f(x)\big)^{(n)} &= (1-x^2)f^{(n+2)}(x) + (-2nx - x)f^{(n+1)}(x)\\
&\quad + (-n(n-1) - n + \lambda^2)f^{(n)}(x)
\end{aligned}$$

Donc finalement :

$$\boxed{(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + (\lambda^2 - n^2)f^{(n)}(x) = 0.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.97

1. **Résolution de $y' + y = \cos x$:**
Les solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0$ sont : $y_0(x) = \lambda e^{-x}$.
D'après la forme du second membre, on sait qu'une solution particulière est à chercher sous la forme :

$$y_1(x) = A\cos x + B\sin x.$$

Alors :

$$y_1' + y_1 = (-A\sin x + B\cos x) + (A\cos x + B\sin x) = (B-A)\sin x + (A+B)\cos x.$$

Il suffit donc que $B - A = 0$ et $B + A = 1$, soit $A = B = \frac{1}{2}$. L'ensemble des solutions de $y' + y = \cos x$ est donc donné par :

$$\boxed{y(x) = \frac{\cos x + \sin x}{2} + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Autre méthode (plus longue) : la méthode de variation de la constante suggère de chercher une solution particulière sous la forme : $y_1(x) = \lambda(x)e^{-x}$.
Alors :

$$y_1' + y_1 = \lambda'(x)e^{-x},$$

d'où (méthode analogue au 2 de l'exercice 1) : $\lambda'(x) = e^x \cos x = \dfrac{e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}}{2}$.
Une primitive est donnée par :

$$\lambda(x) = \frac{e^{(1+i)x}}{2(1+i)} + \frac{e^{(1-i)x}}{2(1-i)} = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x),$$

d'où $y_1(x) = \frac{\cos x + \sin x}{2}$.

2. **Résolution de $y' - 2y + e^x = 0$:**

$$\boxed{y(x) = e^x + \lambda e^{2x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

3. **Résolution de $xy' - 2y + x = 0$:**

$$\boxed{y(x) = x + \lambda x^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

4. **Résolution de $(1 - x^2)y' + 2xy - 4x = 0$:**

$$\boxed{y(x) = 2 + \lambda(1 - x^2), \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

5. **Résolution de $y' - \dfrac{xy}{x^2 - 1} = x$:**

$$\boxed{y(x) = x^2 - 1 + \lambda\sqrt{x^2 - 1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

6. **Résolution de $xy' - y + \ln x = 0$:**

L'équation est définie sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, où elle s'écrit aussi : $\boxed{y' - \dfrac{1}{x}y = -\dfrac{\ln x}{x}.}$ Une primitive de la fonction $\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $\ln x$. Les solutions de l'équation homogène associée $y' - \dfrac{1}{x}y = 0$ sont donc les fonctions : $\lambda e^{\ln x} = \lambda x$. La méthode de variation de la constante suggère de chercher une solution particulière sous la forme : $y_1(x) = \lambda(x)x$.
Alors

$$y_1' - \frac{1}{x}y_1 = \lambda'(x)x.$$

Ainsi y_1 est solution si :

$$\lambda'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

On trouve une primitive de $-\frac{\ln x}{x^2}$ en effectuant une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int -\frac{\ln x}{x^2}\,dx &= \int u(x)v'(x)\,dx \qquad \text{avec } u(x) = \ln x \text{ et } v(x) = \frac{1}{x} \\
&= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx \\
&= \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de $xy' - y + \ln x = 0$ est donc donné par :

$$\boxed{y(x) = \ln x + 1 + \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

7. **Résolution de $y' - \dfrac{3y}{2x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$:**

$$\boxed{y(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2} + \lambda x^{\frac{3}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

8. **Résolution de $y' - y \ln x = x^x$:**

$$\boxed{y(x) = x^x + \lambda \left(\frac{x}{e}\right)^x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

9. **Résolution de $y' - 2xy = (1-2x)e^x$:**

$$\boxed{y(x) = e^x + \lambda e^{x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

10. **Résolution de $y' - \dfrac{3y}{x} = x$:**

$$\boxed{y(x) = -x^2 + \lambda x^3, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

11. **Résolution de $y' + y\cos x = 0$:**

$$\boxed{y(x) = \lambda e^{-\sin x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

12. **Résolution de $y' - y\tan x = \sin 2x$:**

$$\boxed{y(x) = -\frac{2}{3}\cos^2 x + \frac{\lambda}{\cos x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

13. **Résolution de $y' + \dfrac{y}{\sin x} = 0$:**

On calcule une primitive de la fonction $-\dfrac{1}{\sin x}$ en remarquant que :

$$-\frac{1}{\sin x} = -\frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{\cos'(x)}{1-\cos^2 x}$$

Ainsi on fait le changement de variable $t = \cos x$:

$$\begin{aligned} \int -\frac{1}{\sin x}\,dx &= \int \frac{dt}{1-t^2} \\ &= \int -\frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(1+t)}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{t-1}\right| \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right). \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{y(x) = \lambda\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.98

1. **Constantes a, b, c :**
On calcule

$$\begin{aligned}
\frac{a}{4+x^2}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1} &= \frac{a}{4+x^2}+\frac{b(x-1)+c(x+1)}{x^2-1}\\
&= \frac{a}{4+x^2}+\frac{(b+c)x+(c-b)}{x^2-1}\\
&= \frac{a(x^2-1)+((b+c)x+(c-b))(x^2+4)}{x^4+3x^2-4}\\
&= \frac{(b+c)x^3+(a+c-b)x^2+(b+c)x-a+4(c-b)}{x^4+3x^2-4}
\end{aligned}$$

Pour que $f(x)=\frac{a}{4+x^2}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}$, *il suffit* donc que :

$$\begin{cases} b+c=0\\ a+c-b=0\\ 4(b+c)=0\\ -a+4(c-b)=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-c\\ a+2c=0\\ -a+8c=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-c\\ c=10/10=1\\ a=-2c=-2 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{f(x)=-\frac{2}{4+x^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}$.

2. **Primitive de f sur $]-1,1[$:**
D'après les formules du cours, puisque sur $]-1,1[$ on a $|x+1|=x+1$ et $|x-1|=1-x$, on déduit du calcul précédent la primitive :
$\boxed{F(x)=-\arctan\left(\frac{x}{2}\right)-\ln(x+1)+\ln(1-x),}$

3. **Solutions définies sur $]-1,1[$ de $y'-f(x)y=0$:**
On sait que ces solutions sont de la forme

$$y(x)=\lambda e^F(x),\ \text{avec } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Soit encore

$$y(x)=\lambda e^{\left(-\arctan\left(\frac{x}{2}\right)-\ln(x+1)+\ln(1-x)\right)}$$

i.e. $\boxed{y(x)=\lambda\frac{1-x}{x+1}e^{\left(-\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)},\ \lambda\in\mathbb{R}\ .}$

4. **Solutions définies sur $]-1,1[$ de $y'-f(x)y=-\frac{10}{x^4+3x^2-4}$:**
L'équation s'écrit encore $y'-f(x)y=-f(x)$. On applique la méthode de variations de la constante pour trouver une solution particulière, ou on remarque directement que la fonction $y_0(x)=1$ convient. On en déduit les solutions de (1) :
$\boxed{y(x)=1+\lambda\frac{1-x}{x+1}e^{\left(-\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)},\ \lambda\in\mathbb{R}\ .}$

5. **Solution y de (1) telle $y(0)=2$. :**
Avec le résultat précédent, on trouve $y(0)=1+\lambda=2$, il suffit donc de prendre $\boxed{\lambda=1}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.99

1. **Résolution de $y'-y\ln x=0$:**

C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre *i.e.* du type : $y' - a(x)y = 0$. On sait que les solutions sont de la forme $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où A est une primitive de a. Par intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}
\int \ln x\, dx &= \int \underbrace{1}_{=v'(x)} \underbrace{\ln x}_{=u(x)}\, dx \\
&= \underbrace{x}_{=v(x)} \underbrace{\ln x}_{=u(x)} - \int \underbrace{x}_{=v(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{=u'(x)}\, dx \\
&= x\ln x - x \\
e^{x\ln x - x} &= e^{x\ln x}e^{-x} \\
&= \frac{x^x}{e^x}.
\end{aligned}$$

Ainsi les solutions sont :

$$\boxed{y(x) = \lambda \frac{x^x}{e^x}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

2. **Calcul de $g'(x) - g(x)\ln x$:**

La fonction g est le produit de la fonction $\frac{x^x}{e^x}$ et d'une primitive de la fonction $\frac{e^x f(x)}{x^x}$. Et d'après la question précédente (en prenant $\lambda = 1$) on a :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^x}{e^x}\right) = \ln x \frac{x^x}{e^x}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{x^x}{e^x} \times \frac{e^x f(x)}{x^x} + \ln x \frac{x^x}{e^x} \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{e^t f(t)}{t^t}\, dt \\
&= f(x) + (\ln x)\, g(x)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{g'(x) - g(x)\ln x = f(x).}$$

3. **Calcul de g lorsque $f(x) = x^x \sin x$:**

On a alors :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x^x}{e^x}\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{e^t t^t \sin t}{t^t}\,dt \\
&= \frac{x^x}{e^x}\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} e^t \sin t\,dt \\
&= \frac{x^x}{e^x}\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{e^{(1+i)t}-e^{(1-i)t}}{2i}\,dt \qquad \text{d'après les formules d'Euler} \\
&= \frac{x^x}{e^x}\frac{1}{2i}\left[\frac{e^{(1+i)t}}{1+i}-\frac{e^{(1-i)t}}{1-i}\right]_{t=\frac{\pi}{4}}^{t=x} \\
&= \frac{x^x}{e^x}\left[\frac{e^t}{2}\frac{e^{it}(1-i)-e^{-it}(1+i)}{2i}\right]_{t=\frac{\pi}{4}}^{t=x} \\
&= \frac{x^x}{e^x}\left[\frac{e^t}{2}(\sin t-\cos t)\right]_{t=\frac{\pi}{4}}^{t=x} \\
&= \frac{x^x}{e^x}\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x) \\
&= \frac{x^x}{2}(\sin x-\cos x)
\end{aligned}$$

4. **Résolution de $y' - y\ln x = x^x \sin x$:**
La question 1 nous donne la solution de l'équation homogène associée. La question 2 nous dit que g est un solution particulière et la question 3 calcule g. On obtient donc pour solutions :

$$\boxed{y(x) = \frac{x^x}{2}(\sin x - \cos x) + \lambda\frac{x^x}{e^x}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.104

N.B. : tous les ensembles de solutions suivants sont paramétrés par deux constantes réelles λ et μ.

1. $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x}$.
2. $y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}$.
3. $y(x) = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$.
4. $y(x) = e^x\,(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)$.
5. $y(x) = e^{-2x}(\lambda x + \mu)$.
8. $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-3x} - x^2 + 2x$.
9. $y(x) = -\dfrac{1}{3}xe^{-x} + \lambda e^{-x} + \mu e^{3x}$.
10. $y(x) = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x + \dfrac{x}{16}\cos 2x + \dfrac{x^2}{8}\sin 2x$.
11. $y(x) = e^x\,(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x) + \dfrac{x}{4}e^x \sin 2x$.
13. $y(x) = \left(\lambda + \mu x + \dfrac{x^5}{20}\right)e^x$.
14. $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-3x} - x^2 + 2x + \dfrac{4}{5}e^{2x} - \dfrac{3}{4}xe^x$.
15. $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{29}{85}\cos 2x + \dfrac{3}{85}\sin 2x$.

16. $y(x) = \lambda \cos 3x + \mu \sin 3x + \dfrac{x}{6}\left(-5\cos 3x + 2\sin 3x\right)$

17. **Résolution de $3y'' - 2y' - y = x^2$:**
L'équation caractéristique est : $3r^2 - 2r - 1 = 0$. Elle admet deux racines réelles distinctes : 1 et $-\dfrac{1}{3}$. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc : $y_0(x) = \lambda e^x + \mu e^{-\frac{x}{3}}$.
Comme le second membre est un polynôme on sait qu'il existe une solution particulière qui est un polynôme de même degré : $y_1(x) = ax^2 + bx + c$.
Alors :

$$3y_1'' - 2y_1' - y_1 = 3(2a) - 2(2ax+b) - (ax^2+bx+c) = -ax^2 - (4a+b)x + (6a-2b-c).$$

Pour que y_1 soit solution il suffit donc que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -a &=& 1 \\ 4a+b &=& 0 \\ 6a-2b-c &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -1 \\ b &=& 4 \\ c &=& -14 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de $3y'' - 2y' - y = x^2$ est donc donné par :

$$\boxed{y(x) = -x^2 + 4x - 14 + \lambda e^x + \mu e^{-\frac{x}{3}}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

18. $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-3x} - x^2 + 2x + \dfrac{4}{5}e^{2x} - \dfrac{3}{4}xe^x$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.105

On a affaire à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et avec une exponentielle au second membre. On suit donc la méthode du cours.

– **Résolution de l'équation caractéristique :**

$$r^2 - (m+1)r + m = 0$$

possède une racine évidente : 1. Le produit des racines vaut m donc l'autre racine est m. Deux cas sont donc possibles selon que $m = 1$ ou $m \neq 1$.

– **Résolution de l'équation homogène associée si $m \neq 1$:**
Quand les deux racines de l'équation caractéristique sont réelles et distinctes on sait que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies par :

$$y_0(x) = \lambda e^x + \mu e^{mx}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

– **Solution particulière si $m \neq 1$:**
Comme le second membre est de la forme $e^{\tau x}$ avec $\tau = 1$ qui est une racine simple de l'équation caractéristique, on sait qu'il existe une solution particulière du type :

$$y_1(x) = axe^x, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Alors :

$$\begin{array}{rcll} y_1'(x) &=& axe^x + ae^x & \\ y_1''(x) &=& axe^x + 2ae^x & \text{d'après la formule de Leibniz} \\ y_1''(x) - (m+1)y_1'(x) + my_1(x) &=& axe^x + 2ae^x - (m+1)(axe^x + ae^x) + maxe^x & \\ &=& ae^x\left(x + 2 - (m+1)(x+1) + mx\right) & \\ &=& ae^x(1-m) & \end{array}$$

donc :

$$\begin{aligned} y_1''(x)-(m+1)y_1'(x)+my_1(x)=e^x &\Leftarrow a(1-m)=1 \\ &\Leftrightarrow a=\frac{1}{1-m} \text{ car } m\neq 1. \end{aligned}$$

- **Résolution de l'équation homogène associée si $m=1$:**
  Quand l'équation caractéristique a une racine double on sait que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies par :

$$y_0(x)=(\lambda x+\mu)e^x, \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

- **Solution particulière si $m=1$:**
  Comme $\tau=1$ est racine double de l'équation caractéristique on sait qu'il existe une solution particulière de la forme :

$$y_1(x)=ax^2e^x$$

  Alors

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= ax^2e^x+2axe^x \\ y_1''(x) &= ax^2e^x+4axe^x+2ae^x \qquad \text{d'après la formule de Leibniz} \\ y_1''(x)-(m+1)y_1'(x)+my_1(x) &= y_1''(x)-2y_1'(x)+y_1(x) \\ &= ae^x\left(x^2+4x+2-2(x^2+2x)+x^2\right) \\ &= 2ae^x \end{aligned}$$

  donc :

$$\begin{aligned} y_1''(x)-(m+1)y_1'(x)+my_1(x)=e^x &\Leftarrow 2a=1 \\ &\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- **Conclusion :**
  Si $m\neq 1$ les solutions sont les fonctions définies par :

$$\boxed{y(x)=\frac{x}{1-m}e^x+\lambda e^x+\mu e^{mx}, \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.}$$

  Si $m=1$ les solutions sont les fonctions définies par :

$$\boxed{y(x)=\left(\frac{x^2}{2}+\lambda x+\mu\right)e^x, \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.}$$

Solution de l'exercice 6.108

1. **Fonctions f telles que $f'(x)+f(-x)=e^x$:**
   Si f est une solution, en dérivant la relation, on a :

$$f'(x)+f(-x)=e^x \qquad (1)$$

   on déduit :

$$f''(x)-f'(-x)=e^x \qquad (2).$$

   En composant la relation (1) par $-x$ on obtient aussi :

$$f'(-x)+f(x)=e^{-x} \qquad (3).$$

En additionnant les relation (2) et (3) on déduit :

$$f''(x) + f(x) = e^x + e^{-x} \qquad (4).$$

La relation (4) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on sait résoudre par la méthode du cours. Tous calculs faits on trouve :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \qquad (5)$$

Réciproquement, on vérifie parmi ces solutions quelles sont celles qui satisfont à la relation (1) ; on a :

$$f'(x) + f(-x) = (\lambda + \mu) \cos x + (-\mu - \lambda) \sin x + e^x.$$

Donc pour que les fonctions données en (5) vérifient la relation (1) il faut et il suffit que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda + \mu)(\cos x - \sin x) = 0$$

Comme $\cos - \sin$ n'est pas la fonction nulle cela équivaut à $\lambda + \mu = 0$ *i.e.* $\lambda = -\mu$. Les solutions du problème sont donc les fonctions de la forme :

$$\boxed{f(x) = \lambda(\cos x - \sin x) + \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}}$$

3. **Fonctions f telles que $f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$:**

   En remarquant que $\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x$, une méthode analogue au n°1 montre que les solutions vérifient :

   $$f''(x) + f(x) = 0,$$

   i.e. sont de la forme

   $$f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x.$$

   Pour ces fonctions on a :

   $$f'(x) - f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -2\lambda \sin x.$$

   Ainsi les fonctions solution sont celles telles que $\lambda = 0$ *i.e.*

   $$\boxed{f(x) = \mu \sin x, \quad \mu \in \mathbb{R}.}$$

4. **Fonctions f telles que $f'(x) + f(-x) = (-2x + 2)e^x$:**

   Une méthode analogue au n°1 montre que les solutions vérifient :

   $$f''(x) + f(x) = -2xe^x + (2x + 2)e^{-x}.$$

   D'où

   $$f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + (-x + 1)e^x + (x + 2)e^{-x},\ \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

   Parmi celles-ci seules celles vérifiant $\lambda + \mu = 0$ conviennent d'où :

   $$\boxed{f(x) = \lambda\,(\cos x - \sin x) + (-x + 1)e^x + (x + 2)e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}.}$$

SOLUTION DU PROBLÈME 6.112

Partie A

1. (a) **La fonction g est impaire :**
   en effet :
   $$g(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{e^{-x}(1-e^{x})}{e^{-x}(1+e^{x})} = \frac{(1-e^{x})}{(1+e^{x})} = -g(x).$$

   (b) **Relation $g(x) \in]-1, 1[$:**
   On a :
   $$g(x) = \frac{e^{x}-1}{e^{x}+1} = \frac{(e^{x}+1)-2}{e^{x}+1} = 1 - \frac{2}{e^{x}+1} < 1.$$
   D'autre part, comme $e^x > 0$ on a : $-e^x < e^x$
   donc : $-1 - e^x < e^x - 1$
   soit, en divisant par $e^x + 1$ (qui est positif) : $-1 < \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.
   Donc finalement on a a montré que $\boxed{-1 < g(x) < 1.}$

2. **Existence de z :**
   On a :
   $$\begin{aligned}
   \frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)} &= \frac{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}+\dfrac{e^y-1}{e^y+1}}{1+\dfrac{(e^x-1)(e^y-1)}{(e^x+1)(e^y+1)}} \\
   &= \frac{\dfrac{(e^x-1)(e^y+1)+(e^y-1)(e^x+1)}{(e^x+1)(e^y+1)}}{\dfrac{(e^x+1)(e^y+1)+(e^x-1)(e^y-1)}{(e^x+1)(e^y+1)}} \\
   &= \frac{(e^x-1)(e^y+1)+(e^y-1)(e^x+1)}{(e^x+1)(e^y+1)+(e^x-1)(e^y-1)} \\
   &= \frac{e^xe^y-e^y+e^x-1+e^xe^y+e^y-e^x-1}{e^xe^y+e^y+e^x+1+e^xe^y-e^y-e^x+1} \\
   &= \frac{2(e^{x+y}-1)}{2(e^{x+y}+1)} \\
   &= g(x+y).
   \end{aligned}$$
   Ainsi un tel z existe en prenant $\boxed{z = x + y.}$ *n.b.* : le second membre de la relation est bien défini pour tout x, y car $g(x)g(y) \neq -1$ d'après $g(x), g(y) \in]-1, 1[$ (question 1.(b)).

3. (a) **g est une bijection ; calcul de g^{-1} :**
   Soit $y \in]-1, 1[$. Alors $\boxed{\text{l'équation } g(x) = y}$ est équivalente à :
   $$\begin{aligned}
   & \frac{e^x-1}{e^x+1} = y \\
   \Leftrightarrow\ & e^x - 1 = y(e^x+1) \\
   \Leftrightarrow\ & e^x - ye^x = y + 1 \\
   \Leftrightarrow\ & e^x(1-y) = y + 1 \\
   \Leftrightarrow\ & e^x = \frac{y+1}{1-y} \text{ car } y \neq 1 \\
   \Leftrightarrow\ & x = \ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right),
   \end{aligned}$$

car $\dfrac{y+1}{1-y}$ est strictement positif puisque $y \in]-1,1[$. Ainsi, pour tout $y \in]-1,1[$ l'équation $g(x) = y$ a une et une seule solution $x \in \mathbb{R}$, donc g est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$, et la réciproque de g est donnée par :

$$\boxed{g^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right).}$$

(b) **Calcul de $(g^{-1})'$:**

La question précédente donne immédiatement :

$$\left(g^{-1}\right)'(y) = \frac{d}{dy}\left(\ln(y+1) - \ln(1-y)\right) = \frac{1}{y+1} + \frac{1}{1-y}.$$

Soit :

$$\boxed{\left(g^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{y+1} + \frac{1}{1-y} = \frac{2}{1-y^2}.}$$

n.b. : ne pas dériver directement g^{-1}. Penser à décomposer $g^{-1}(y)$ en une différence de logarithmes.

Partie B

1. **Si $f(c) = 1$ ou $f(c) = -1$ alors f est constante :**

S'il existe c tel que alors $f(c) = 1$, pour tout t réel, en prenant $y = c$ et $x = t - c$ dans relation (R) on obtient :

$$f((t-c)+c) = \frac{f(t-c)+f(c)}{1+f(t-c)f(c)} = \frac{f(t-c)+1}{1+f(t-c)} = 1,$$

soit $f(t) = 1$ pour tout t, donc f est constante égale à 1.

Le cas $f(c) = -1$ est analogue.

2. (a) **Relation $f(x) \in]-1,1[$:**

La relation (R) implique que :

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+f\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Comme f n'est pas constante, on a $f\left(\frac{x}{2}\right)$ qui est différent de 1 et -1, donc : $\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| \neq 1$.

Ainsi :

$$\left(1 - \left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)^2 > 0.$$

soit :

$$1 - 2\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| + f\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0,$$

soit :

$$1 + f\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 2\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right|,$$

soit

$$\frac{2\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right|}{1+f\left(\frac{x}{2}\right)^2} < 1,$$

soit

$$|f(x)| < 1,$$

soit

$$\boxed{f(x) \in]-1, 1[.}$$

(b) **Relation $f(0) = 0$:**

$\boxed{\text{En prenant } x = y = 0 \text{ dans la relation } (R)}$ on a :

$$f(0) = \frac{2f(0)}{1 + f(0)^2},$$

soit :

$$f(0)(1 + f(0)^2) = 2f(0),$$

soit :

$$\boxed{f(0)(f(0)^2 - 1) = 0.}$$

Comme $f(x) \neq 1$ et $f(x) \neq -1$, puisqu'on a supposé f non constante on déduit que $\boxed{f(0) = 0.}$

(c) **f est impaire :**

En prenant $y = -x$ dans la relation (R) on a :

$$0 = f(0) = \frac{f(x) + f(-x)}{1 + f(x)^2},$$

donc le numérateur est nul, soit $\boxed{f(-x) = -f(x).}$

3. (a) **Relation $\frac{1+f(nx)}{1-f(nx)} = \left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n$. :**

Montrons cette relation $\boxed{\text{par récurrence sur } n \geqslant 1 :}$

– Pour $n = 1$ elle est évidente.

– Si elle est vraie à l'ordre n, comme :

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = \frac{f(x) + f(nx)}{1 + f(x)f(nx)},$$

on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1 + f((n+1)x)}{1 - f((n+1)x)} &= \frac{1 + \dfrac{f(x) + f(nx)}{1 + f(x)f(nx)}}{1 - \dfrac{f(x) + f(nx)}{1 + f(x)f(nx)}} \\
&= \frac{1 + f(x) + f(nx) + f(x)f(nx)}{1 - f(x) - f(nx) + f(x)f(nx)} \\
&= \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)} \frac{1 + f(nx)}{1 - f(nx)} \\
&= \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)} \left(\frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}\right)^n \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \left(\frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

(b) **Calcul de $f(n)$:**

Pour $x = 1$ la question précédente donne :

$$\frac{1+f(n)}{1-f(n)} = a^n,$$

soit : $1 + f(n) = a^n - a^n f(n)$,

soit : $f(n)(1 + a^n) = a^n - 1$, soit : $\boxed{f(n) = \frac{a^n - 1}{a^n + 1},}$

puisque $a^n \neq -1$ du fait que $\boxed{a \neq -1,}$ car sinon on aurait :

$$-1 = \frac{1+f(1)}{1-f(1)} \Leftrightarrow -(1 - f(1)) = 1 + f(1) \Leftrightarrow -1 = 1...!$$

Partie C

1. (a) **Relation entre $f'(x)$, k et $1 - f(x)^2$:**

Quand on dérive par rapport à y, alors $f(x)$ est une constante, donc :

$$\frac{\partial i}{\partial y}(x, y) = f'(x + y),$$

donc, pour $y = 0$ on a : $\boxed{\frac{\partial i}{\partial y}(x, 0) = f'(x).}$

D'autre part on a :

$$\begin{array}{rcl} i(y) & = & f(x+y) - f(x) \\ & = & \dfrac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)} - f(x) \\ & = & \dfrac{f(x) + f(y) - f(x)(1 + f(x)f(y))}{1 + f(x)f(y)} \\ & = & f(y)\dfrac{1 - f(x)^2}{1 + f(x)f(y)}. \end{array}$$

Si on dérive par rapport à y on obtient donc :

$$\frac{\partial i}{\partial y}(x, y) = f'(y)\frac{1 - f(x)^2}{1 + f(x)f(y)} + f(y)\frac{d}{dy}\left(\frac{1 - f(x)^2}{1 + f(x)f(y)}\right),$$

donc, pour $y = 0$, compte-tenu de la relation $f(0) = 0$, on déduit :

$$\frac{\partial i}{\partial y}(x, 0) = f'(0)(1 - f(x)^2).$$

En conclusion on a : $\boxed{f'(x) = k(1 - f(x)^2).}$

(b) **Le nombre k est-il nul ? :**

Si le nombre k était nul, d'après la question précédente, on aurait $\boxed{f' = 0}$ donc, comme f est définie sur $\boxed{\text{l'intervalle}}$ $\mathbb{R}$, elle serait constante, ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi $\boxed{k \neq 0.}$

(c) **Bijectivité de f :**

Comme f est à valeurs dans $]-1, 1[$, d'après la question 2.a, la relation $f'(x) = k(1 - f(x)^2)$. indique que f' ne s'annule pas. Alors le *théorème d'inversion globale* affirme exactement ce qui est demandé, à savoir que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle ouvert J et que sa réciproque f^{-1} est dérivable elle aussi.

2. (a) **Calcul de $\left(f^{-1}\right)'(y)$:**
La formule de dérivation d'une réciproque est :

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.}$$

Compte-tenu de la relation trouvée à la question précédente on a, pour tout $y \in J$:

$$f'(f^{-1}(y)) = k(1 - f(f^{-1}(y))^2) = k(1 - y^2),$$

donc

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{k(1-y^2)}.}$$

(b) **Primitive de h :**
La fonction h est une fraction rationnelle qui s'écrit aussi :

$$h(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x-1}\right),$$

donc elle admet pour primitive la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{x-1}\right|$. Sur l'intervalle $J \subset]-1,1[$ on a $\frac{1+x}{x-1} < 0$ donc cette primitive s'écrit plus simplement :

$$\boxed{x \longmapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).}$$

(c) **Détermination de f^{-1} :**
On connaît la dérivée de f^{-1} ; comme on est sur $\boxed{\text{l'intervalle}}$ $]-1,1[$, on peut en déduire f^{-1} par calcul de primitive, à une constante près. Comme $f^{-1}(0) = 0$ (puisque $0 = f(0)$) on peut calculer la constante. On obtient :

$$\boxed{f^{-1}(y) = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).}$$

n.b. on avait prouvé auparavant que $k \neq 0$.

(d) **Détermination de f :**
On a :

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow 2kx = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = g^{-1}(y) \Leftrightarrow g(2kx) = y.$$

Comme : $\boxed{f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x),}$

on déduit que : $\boxed{f(x) = g(2kx) = \frac{e^{2kx}-1}{e^{2kx}+1}.}$

SOLUTION DU PROBLÈME 6.114

1. **g est une solution de $y'\sqrt{x^2+1} - y = 0$:**
On dérive g :

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1 = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Donc $\boxed{g'(x)\sqrt{x^2+1} - g(x) = 0.}$

2. **Une primitive de h :**
D'après la question précédente on voit que :

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}g(x)^n} = \frac{g'(x)}{g(x)^{n+1}}.$$

Or on sait que :

$$\int \frac{1}{x^{n+1}}\,dx = \begin{cases} \ln|x| & \text{si } n=0 \\ \frac{1}{-nx^n} & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{\int h(x)\,dx = \begin{cases} \ln|\sqrt{x^2+1}+x| & \text{si } n=0 \\ \frac{1}{-n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n} & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}}$$

3. **Constante a :**
On calcule :

$$\begin{aligned}(xf(x))' + \frac{1}{f(x)} &= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{(x^2+1)+x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= 2\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= 2\sqrt{x^2+1}\end{aligned}$$

Pour avoir $a\left((xf(x))' + \frac{1}{f(x)}\right) = f(x)$, il suffit donc de prendre $\boxed{a = \frac{1}{2}.}$

4. **Une primitive de f :**
D'après la relation précédente, une primitive de f est donnée par :

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(xf(x) + \int \frac{1}{f(x)}\,dx\right).$$

Or d'après la question 2, pour $n=0$ on a :

$$\int \frac{1}{f(x)}\,dx = \ln|\sqrt{x^2+1}+x|,$$

Donc

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln|\sqrt{x^2+1}+x|\right).}$$

5. **Une primitive de $\dfrac{1}{g}$:**
On remarque que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(x)} &= \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})} \\ &= \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-(1+x^2)} \\ &= -x+\sqrt{x^2+1} \\ &= -x+f(x)\end{aligned}$$

D'après la question précédente, on connaît une primitive de f, d'où :

$$\boxed{\int \frac{1}{g(x)}\,dx = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln\left|\sqrt{x^2+1}+x\right|\right).}$$

6. **Résolution de l'équation différentielle :**
C'est $\boxed{\text{une équation différentielle linéaire}}$ d'ordre 1. Les solutions sont donc de la forme : $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$,
où y_1 est une solution particulière de l'équation et y_0 décrit l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre : $y'\sqrt{x^2+1} - y = 0$.
$\boxed{\text{D'après la question 1,}}$ on sait que g est une solution de l'équation sans second membre. Comme on sait que toutes les solutions de l'équation sans second membre sont multiples de l'une d'elle (non nulle) on a :

$$\boxed{y_0(x) = \lambda g(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

On cherche alors une solution particulière y_1 de la forme :

$$y_1(x) = \lambda(x)g(x) \qquad \text{(méthode de variation de la constante)}$$

Alors

$$y_1'(x)\sqrt{x^2+1} - y_1(x) = \lambda'(x)g(x)\sqrt{x^2+1},$$

donc il suffit que

$$\lambda'(x) = \frac{1}{g(x)\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{n-1}} = h(x).$$

Comme $n \geqslant 1$, d'après le résultat de la question 2, on peut prendre :

$$\lambda(x) = \frac{1}{-n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n}.$$

En résumé les solutions de l'équation différentielle $y'\sqrt{x^2+1} - y = \dfrac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{n-1}}$ sont :

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{-n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{n-1}} + \lambda\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Solution du problème 6.115

1. **Tout polynôme solution de (E) est de degré 2 :**
Tout polynôme non nul s'écrit sous la forme :

$$P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0, \qquad \text{avec } a_n \neq 0.$$

On fait alors le calcul suivant en n'écrivant que les termes de plus haut degré :

$$\begin{aligned} & (X^2-1)P'' + 2XP' - 6P \\ = \ & (X^2-1)\left(n(n-1)a_nX^{n-2} + \cdots\right) + 2X\left(na_nX^{n-1} + \cdots\right) - 6\left(a_nX^n + \cdots\right) \\ = \ & a_n\left((n(n-1) + 2n - 6\right)X^n + \cdots \end{aligned}$$

Pour que ce polynôme puisse être nul, comme $a_n \neq 0$, il faut nécessairement que $n(n-1)+2n-6 = 0$, soit $n^2+n-6 = 0$. Cette équation du second degré en n a deux solutions $n = 2$ ou $n = -3$; comme n est un entier positif la seule solution est $\boxed{n = 2.}$

2. **Un polynôme P solution de (E) tel que $P(0) = 1$:**
D'après la question précédente on cherche un polynôme P de la forme : $P = aX^2 + bX + c$.
On calcule :

$$(X^2-1)P''+2XP'-6P = (X^2-1)(2a)+2X(2aX+b)-6(aX^2+bX+c) = -4bX+(-2a-6c).$$

Donc P est solution si et seulement si $-4b = 0$ et $-2a - 6c = 0$ soit $a = -3c$ et $b = 0$. Pour que $P(0) = 1$ il faut de plus que $c = 1$. Il y a donc une seule solution : $\boxed{P = -3X^2 + 1.}$

3. **F est une solution de (E) :**
On calcule le premier membre de l'équation différentielle où on a remplacé y par F pour vérifier que c'est nul. Pour simplifier les calculs on remarque que :

$$(x^2-1)y''+2xy' = ((x^2-1)y')'$$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= P'(x)\int_0^x \frac{1}{(t^2-1)P(t)^2}\,dt + P(x)\times\frac{1}{(x^2-1)P(x)^2}\\
(x^2-1)F'(x) &= (x^2-1)P'(x)\int_0^x \frac{1}{(t^2-1)P(t)^2}\,dt + \frac{1}{P(x)}\\
(x^2-1)F''(x)+2xF'(x) &= \left((x^2-1)P'(x)\int_0^x \frac{1}{(t^2-1)P(t)^2}\,dt + \frac{1}{P(x)}\right)'\\
&= (x^2-1)P'(x)\times\frac{1}{(x^2-1)P(x)^2}\\
&\quad + \big((x^2-1)P'(x)\big)'\int_0^x \frac{1}{(t^2-1)P(t)^2}\,dt - \frac{P'(x)}{P(x)^2}\\
&= \big((x^2-1)(-6x)\big)'\int_0^x \frac{1}{(t^2-1)P(t)^2}\,dt\\
&= (-18x^2+6)\int_0^x \frac{1}{(t^2-1)P(t)^2}\,dt\\
&= 6(-3x^2+1)\int_0^x \frac{1}{(t^2-1)P(t)^2}\,dt\\
&= 6P(x)\int_0^x \frac{1}{(t^2-1)P(t)^2}\,dt = 6F(x).
\end{aligned}$$

Donc F est bien solution de l'équation différentielle.

4. **$\lambda P + \mu F$ est solution de (E) :**
En effet, en utilisant la $\boxed{\text{linéarité de la dérivation}}$ et le fait que $\boxed{\text{l'équation différentielle est linéaire}}$ on a :

$$\begin{aligned}
& (x^2-1)\left(\lambda P(x)+\mu F(x)\right)'' + 2x\left(\lambda P(x)+\mu F(x)\right)' - 6\left(\lambda P(x)+\mu F(x)\right)\\
= \;& (x^2-1)\left(\lambda P''(x)+\mu F''(x)\right) + 2x\left(\lambda P'(x)+\mu F'(x)\right) - 6\left(\lambda P(x)+\mu F(x)\right)\\
= \;& \lambda\big((x^2-1)P''(x)+2xP'(x)-6P(x)\big) + \mu\big((x^2-1)F''(x)+2xF'(x)-6F(x)\big)\\
= \;& \lambda 0 + \mu 0 = 0 \quad \text{car } F \text{ et } P \text{ sont des solutions de l'équation différentielle}
\end{aligned}$$

5. **Une solution y de (E) telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$:**
On la cherche sous la forme $\lambda P + \mu F$. Il faut que

$$1 = (\lambda P + \mu F)(0) = \lambda P(0) + \mu F(0) = \lambda,$$

car $P(0)=1$ et F est définie au moyen d'une primitive qui s'annule en 0. De même :

$$1=\lambda P'(0)+\mu F'(0)=\mu F'(0),$$

car $P'=-6X$ s'annule en 0. Le calcul de F' utilisé à la question 3 permet de trouver :

$$F'(0)=P(0)\times\frac{1}{(0^2-1)P(0)^2}=-1.$$

donc $\boxed{y(x)=P(x)-F(x).}$

Solution du problème 6.116

1. **Condition nécessaire et suffisante pour que y soit solution de (E) :**
La fonction y est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{cases} y''' &= -y''+5y'-3y \\ y'' &= y'' \\ y' &= y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y'''(t) \\ y''(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y''(t) \\ y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

2. **Recherche de a et b :**
On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \end{pmatrix}M=\begin{pmatrix} -1+a & 5+b & -3 \end{pmatrix}$$

La relation souhaitée s'écrit donc :

$$\begin{cases} -1+a &= -3 \\ 5+b &= -3a \\ -3 &= -3b \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a &= -2 \\ b &= 1 \end{cases}}$$

3. **$y''+ay'+by$ est solution de l'équation différentielle $z'=-3z$:**
Si y est solution de (E) d'après la question 1, on a, pour tout t :

$$\begin{pmatrix} y'''(t) \\ y''(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} y''(t) \\ y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{En multipliant à gauche par le vecteur ligne } \begin{pmatrix} 1 & a & b \end{pmatrix}}$ on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y'''(t) \\ y''(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a & b \end{pmatrix}M\begin{pmatrix} y''(t) \\ y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

Soit, d'après la question 2 :

$$y'''+ay''+by'=-3\begin{pmatrix} 1 & a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y''(t) \\ y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=-3(y''+ay'+by),$$

Soit : $\boxed{(y''+ay'+by)'=-3\left(y''+ay'+by\right).}$

$\boxed{\text{Réciproquement}}$ si on a :

$$\left(y''-2y'+y\right)'=-3\left(y''-2y'+y\right),$$

cela s'écrit aussi :

$$y'''-2y''+y'=-3y''+6y'-3y,$$

soit : $y'''+y''-5y'+3y=0$, qui est l'équation (E).

4. **Résolution de $y'' + ay' + by = 0$:**
   C'est une équation différentielle linéaire du second ordre homogène à coefficients constants. Son équation caractéristique est : $x^2 + ax + b = 0$, soit $x^2 - 2x + 1 = 0$,
   qui a une racine double 1. D'après le cours les solutions sont donc :

$$\boxed{y_0(x) = (\lambda x + \mu)e^x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

5. **Résolution de (E) :**
   D'après la question 3, $y'' + ay' + by$ est solution de l'équation $z' = -3z$, donc il existe $\nu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{y'' - 2y' + y = \nu e^{-3x}.}$$

   Ainsi y est solution d'une différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre. Comme -3 n'est pas solution de l'équation caractéristique, on sait qu'une solution particulière est de la forme $y_1(x) = \alpha e^{-3x}$. Comme

$$\left(\alpha e^{-3x}\right)'' - 2\left(\alpha e^{-3x}\right)' + \left(\alpha e^{-3x}\right) = 16\alpha e^{-3x},$$

   il suffit de prendre $\alpha = \frac{\nu}{16}$.
   D'après la question précédente qui donne les solutions de l'équation homogène associée, l'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{y(x) = (\lambda x + \mu)e^x + \frac{\nu}{16}e^{-3x}, \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}.}$$

Solution du problème 6.117

1. **$\varphi(P)$ est de degré au plus 2 :**
   Si P est de degré au plus 2 alors $(2X+1)P$ et $(X^2-1)P'$ sont de degré au plus 3 et donc $\varphi(P)$ aussi. Si on écrit $P = aX^2 + bX + c$, le terme de degré 3 de $\varphi(P)$ est alors donné par :

$$(2X)aX^2 - X^2(2aX) = 0.$$

   Donc en fait $\varphi(P)$ est degré au plus 2.

2. **Calcul de μ, ν :**
   On a :

$$\frac{\mu}{x-1} + \frac{\nu}{x+1} = \frac{(\mu+\nu)x + (\mu-\nu)}{x^2-1}.$$

   Donc pour que, pour tout x :

$$\frac{2x+1-\lambda}{x^2-1} = \frac{\mu}{x-1} + \frac{u}{x+1},$$

   il suffit que :

$$\begin{cases} \mu + \nu = 2 \\ \mu - \nu = 1 - \lambda \end{cases},$$

   soit

$$\boxed{\mu = \frac{3-\lambda}{2} \text{ et } \nu = \frac{\lambda+1}{2}.}$$

3. **Résolution de (E_λ) :**
L'équation différentielle (E_λ) est linéaire du premier ordre et homogène. On peut l'écrire aussi :
$$y' - \frac{2x+1-\lambda}{x^2-1}y = 0.$$
Pour résoudre cette équation il suffit de trouver une primitive de la fonction $\frac{2x+1-\lambda}{x^2-1}$. D'après la question précédente on obtient :
$$\int \frac{2x+1-\lambda}{x^2-1}\,dx = \int \frac{\mu}{x-1} + \frac{\nu}{x+1}\,dx = \mu \ln|x-1| + \nu \ln|x+1| = \mu \ln(1-x) + \nu \ln(x+1),$$
car on se place sur l'intervalle $]-1,1[$.
Les solutions de l'équation sont donc les fonctions suivantes :
$$\boxed{y(x) = \alpha e^{\mu \ln(1-x)+\nu \ln(x+1)}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.}$$

4. **Valeurs de λ telles qu'on obtienne des polynômes :**
Les solutions précédentes s'écrivent aussi :
$$\boxed{y(x) = \alpha(1-x)^\mu(1+x)^\nu.}$$
Pour obtenir des polynômes il suffit donc que μ et ν soient des entiers positifs ou nuls *i.e.* :
$$\boxed{\frac{3-\lambda}{2} \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{\lambda+1}{2} \in \mathbb{N}.}$$
Pour que cette dernière condition soit réalisée il faut que :
$$\frac{3-\lambda}{2} \geqslant 0 \text{ et } \frac{\lambda+1}{2} \geqslant 0,$$
soit :
$$-1 \leqslant \lambda \leqslant 3.$$
Or l'énoncé impose des valeurs de λ entières ; réciproquement on voit que les seuls les entiers $-1, 1$ et 3 conviennent. Donc finalement
$$\boxed{y \in \mathbb{R}[X] \text{ si } \lambda \in \{-1,1,3\}.}$$

5. **Détermination de P_1, P_2, P_3 :**
L'équation $\varphi(P) = \lambda P$ où P est un polynôme s'écrit aussi :
$$(2X+1)P - (X^2-1)P' = \lambda P,$$
soit :
$$(2X+1-\lambda)P - (X^2-1)P' = 0.$$
Ainsi les solutions de cette équation sont les polynômes P qui sont solution de l'équation différentielle (E_λ). Or à la question précédente on a trouvé des solutions polynomiales lorsque $\lambda \in \{-1,1,3\}$ à savoir :

λ	μ	ν	$\alpha(1-x)^\mu(1+x)^\nu$
-1	2	0	$\alpha(1-X)^2 = \alpha(X^2-2X+1)$
1	1	1	$\alpha(1-X)(1+X) = \alpha(1-X^2)$
3	0	2	$\alpha(1+X)^2 = \alpha(X^2+2X+1)$

Comme on veut que $P(0) = 1$ dans chacun de ces cas on voit qu'on doit prendre $\alpha = 1$. Donc finalement : on voit qu'on peut prendre :
$$\boxed{P_1 = 1-X^2, \qquad P_2 = X^2-2X+1 \text{ et } \qquad P_3 = X^2+2X+1.}$$

Solutions des exercices du chapitre 7

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.1

19. D'après les théorèmes de calcul sur les limites on a :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x^2} + x}{\ln(1+x^2)} = +\infty.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.5

Dans chaque question on calcule le terme général de la suite puis on en déduit sa limite grâce aux théorèmes de calcul sur les limites :

1. $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ donc $\boxed{\lim(u_n) = 0.}$
2. $v_n = -2 + \dfrac{1}{2^n}$ donc $\boxed{\lim(v_n) = -2.}$
3. Remarquer que $\ln(w_n) = v_n$, donc $w_n = e^{-2+\frac{1}{2^n}}$, donc $\boxed{\lim(w_n) = e^{-2}.}$
4. Remarquer que la suite de terme général $\dfrac{x_n}{n}$ est géométrique de raison $\dfrac{3}{2}$, donc $x_n = n\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$, d'où $\boxed{\lim(x_n) = +\infty.}$
5. Remarquer que la suite de terme général $\ln(y_n)$ vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2. On calcule alors son terme général par la méthode du cours ; on obtient :
$$\ln(y_n) = \frac{2}{3}\ln 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$
Donc : $\boxed{\lim(y_n) = e^{\frac{2}{3}\ln 2} = \sqrt[3]{4}.}$
6. On trouve que :
$$z_n = \begin{cases} \dfrac{m^n - 1}{m-1} & \text{si } m \neq 1 \\ n & \text{si } m = 1 \end{cases}$$
Donc :
$$\boxed{\lim(z_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-m} & \text{si } m < 1 \\ +\infty & \text{si } m \geqslant 1 \end{cases}}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.6

On trouve :

1. $\boxed{u_n = \dfrac{1}{2}\left(e^{-n\pi}(-1)^n - (-1)^{n+1}e^{-(n+1)\pi}\right).}$
2. Par télescopage :
$$s_n = \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^{n+1}e^{-(n+1)\pi}\right),$$
Comme $0 < e^{-\pi} < 1$, d'après le résultat sur les limites des suites géométriques on a :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{2}.}$$

Solution de l'exercice 7.12

Comme $f' = g'$ on trouve finalement que :

$$\boxed{f = g \text{ sur }]-\infty, -1, [\cup]0, +\infty[\qquad \text{et} \qquad f = g + \pi \text{ sur }]-1, 0[.}$$

Solution de l'exercice 7.18

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sqrt{\frac{1-x}{x}} = 0$
   car $\displaystyle x\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \sqrt{x(1-x)}$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x^2}} = +\infty$
   car $\displaystyle\frac{e^{-x}}{e^{-x^2}} = e^{x^2-x}$
   et $x^2 - x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ tend vers $+\infty$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = 1$
   car $\displaystyle\frac{x^2-3x+2}{x-2} = x-1$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x^2) + \ln\frac{1+x}{x} = -\infty$
   car $\displaystyle\ln(x^2) + \ln\frac{1+x}{x} = \ln x(1+x)$.

5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) - \ln(x-1) = 0$
   car $\displaystyle\ln(x+1) - \ln(x-1) = \ln\frac{x+1}{x-1}$ et $\displaystyle\frac{x+1}{x-1}$ tend vers 1.

6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0$
   car $\displaystyle\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x}$.

7. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\tan x - 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
   car $\displaystyle\frac{\cos x - \sin x}{\tan x - 1} = \frac{\cos x - \sin x}{\frac{\sin x}{\cos x} - 1} = -\cos x$.

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\pi(\cos^2 x - \cos x)}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = \pi$
   car :
$$\begin{aligned} & \frac{\pi(\cos^2 x - \cos x)}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} \\ = & \frac{\pi\cos x(\cos x - 1)}{(\cos x - 1)(2\cos x - 1)} \\ = & \frac{\pi\cos x}{2\cos x - 1} \end{aligned}$$

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{2}$
   car $\displaystyle\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{1+\cos x}$.

10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = 1$
    car :
$$\begin{aligned} & \frac{\ln(1+e^x)}{x} \\ = & \frac{\ln(e^x(e^{-x}+1))}{x} \\ = & \frac{\ln x + \ln(e^{-x}+1)}{x} \\ = & 1 + \frac{\ln(e^{-x}+1)}{x}. \end{aligned}$$

11. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^2+(1-a)x-a} = \begin{cases} \frac{a-1}{a+1} & \text{si } a \neq -1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } a = -1 \end{cases}$
    car $\displaystyle\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^2+(1-a)x-a} = \frac{(x-1)(x-a)}{(x+1)(x-a)}$.

12. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{ax^2+(a^2+1)x+a}{x-5} = \begin{cases} \text{n'existe pas} & \text{si } a \notin \left\{-5, -\frac{1}{5}\right\} \\ -24 & \text{si } a = -5 \\ -\frac{24}{25} & \text{si } a = -\frac{1}{5} \end{cases}$

Solution de l'exercice 7.20

On trouve :

1. $\lim(u_n) = 1$.
2. $\lim(u_n) = \dfrac{1}{2}$.
3. $\lim(u_n) = \dfrac{1}{3}$.
4. $\lim(u_n) = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.21

1. Comme, en $+\infty$, on a : $1 = \mathrm{o}(\ln x)$
on déduit que : $1 + \ln x \underset{+\infty}{\sim} \ln x$ et $\ln x - 1 \underset{+\infty}{\sim} \ln x$
donc : $\dfrac{1+\ln x}{\ln x - 1} \underset{+\infty}{\sim} 1$
donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x}{\ln x - 1} = 1.}$
2. Comme :
$$\frac{\ln(xe^x)}{x} = \frac{\ln x + \ln(e^x)}{x} = \frac{\ln x}{x} + 1,$$
on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(xe^x)}{x} = 1.}$
3. Comme, en $+\infty$, on a : $\ln x = \mathrm{o}(x)$
on déduit que : $3x - 2\ln x \underset{+\infty}{\sim} 3x$ et $x + \ln x \underset{+\infty}{\sim} x$
donc : $\dfrac{3x - 2\ln x}{x + \ln x} \underset{+\infty}{\sim} 3$
donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x - 2\ln x}{x + \ln x} = 3.}$
4. On remarque que :
$$\frac{\ln(1+e^x)}{x} = \frac{\ln(e^x(e^{-x}+1))}{x} = \frac{\ln x + \ln(e^{-x}+1)}{x} = 1 + \frac{\ln(e^{-x}+1)}{x}.$$
Donc d'après les théorèmes de calcul sur les limites :
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = 1.}$$
5. Dans chaque somme il y a un terme prépondérant ; ainsi :
$$3xe^{-x} + 2\ln x^2 - 7x^3 \underset{+\infty}{\sim} -7x^3, \qquad xe^x + 3x + 2 \underset{+\infty}{\sim} xe^x \text{ et } 5e^{-x} + e^{-x^2} \underset{+\infty}{\sim} 5e^{-x}.$$
Donc :
$$\frac{(3xe^{-x} + 2\ln x^2 - 7x^3)e^x}{(xe^x + 3x + 2)(5e^{-x} + e^{-x^2})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-7x^3e^x}{xe^x \times 5e^{-x}} = -\frac{7}{5}x^2e^2.$$
Donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(3xe^{-x} + 2\ln x^2 - 7x^3)e^x}{(xe^x + 3x + 2)(5e^{-x} + e^{-x^2})} = -\infty.}$
7. On remarque que : $\dfrac{\ln^r x}{x^s} = \left(\dfrac{\ln x}{x^{\frac{s}{r}}}\right)^r$.
Comme, pour tout $t > 0$, en $+\infty$, on a : $\ln x = \mathrm{o}(x^t)$, on déduit que : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^r x}{x^s} = 0.}$
8. Comme $\ln x = \mathrm{o}(x^s)$ en $+\infty$, on a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^s}{\ln x} = +\infty.$$

Donc, d'après les théorèmes de calcul sur les limites on a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^s \ln(1+rx)}{\ln x} = +\infty.}$$

9. On a : $\dfrac{r^x}{x^s} = \dfrac{e^{x\ln r}}{x^s}$.
   - <u>Si $r < 1$:</u> on a $\ln r < 0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} r^x = 0$

     donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{r^x}{x^s} = 0$.
   - <u>Si $r = 1$:</u> on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} r^x = 1$

     donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{r^x}{x^s} = 0$.
   - <u>Si $r > 1$:</u> on a $\ln r > 0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} r^x = +\infty$.

     On a donc affaire à une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Cependant on sait que : $u^s = \mathrm{o}\left(e^u\right)$ en $+\infty$. Comme $u = x\ln r$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ déduit que : $(\ln r)^s x^s = \mathrm{o}\left(e^{x\ln r}\right)$ d'où : $x^s = \mathrm{o}\left(e^{x\ln r}\right)$.

     Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{r^x}{x^s} = +\infty$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.22

On trouve :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2^n+n) = +\infty$ **:**
   D'après les théorèmes de calcul sur les limites et le résultat :
$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty.$$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2^n-n) = +\infty$ **:**
   En effet, quand n tend vers $+\infty$, on a
$$n = \mathrm{o}(2^n),$$
   puisque $2^n = e^{n\ln 2}$ et $x = \mathrm{o}(e^x)$ quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que :
$$2^n - n \underset{+\infty}{\sim} 2^n.$$
   Comme ces deux suites tendent vers $+\infty$ on en déduit que :
$$\ln(2^n-n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(2^n) = n\ln 2,$$
   d'où le résultat annoncé.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ **:**
   En effet on a :
$$\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}}.$$
   Comme $\ln n = \mathrm{o}(n)$ quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0,$$
   donc, d'après le théorème de composition des limites :
$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1.$$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}} = 1$ **:**
   En effet on a :
$$(\ln n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(\ln n)}{n}}.$$
   Comme $\ln x = \mathrm{o}(x)$ quand x tend vers $+\infty$, par changement de variable $x = \ln n$ (qui tend bien vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$), on a
$$\ln(\ln n) = \mathrm{o}(\ln n) = \mathrm{o}(n) \text{ d'après } \ln n = \mathrm{o}(n).$$
   Ainsi on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n} = 0,$$
   donc, d'après le théorème de composition des limites :
$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln(\ln n)}{n}} = e^0 = 1.$$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3+2^n}{3^n} = 0$ **:**
Par les mêmes arguments qu'à la question 2, on a :
$$n^3 = \mathrm{o}\left(2^n\right)$$
Donc :
$$\frac{n^3+2^n}{3^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
Comme $\left|\dfrac{2}{3}\right| < 1$, on en déduit que :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,$$
d'où le résultat.

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(a^n+b^n\right)^{\frac{1}{n}} = \max(a,b)$ **:**
On distingue trois cas :
– <u>Si $a=b$,</u> on a :
$$\left(a^n+b^n\right)^{\frac{1}{n}} = \left(2a^n\right)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}}a.$$
Or :
$$2^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln 2}{n}}$$
tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(a^n+b^n\right)^{\frac{1}{n}} = a = \max(a,b).$$
– <u>Si $a>b$,</u> on a :
$$\begin{aligned}\left(a^n+b^n\right)^{\frac{1}{n}} &= \left(a^n\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)\right)^{\frac{1}{n}}\\ &= a\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}\\ &= ae^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}\end{aligned}$$
Or, d'après l'hypothèse $0<b<a$, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n = 0.$$
Donc, d'après les théorèmes de calcul sur les limites :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right) = 0,$$
d'où :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(a^n+b^n\right)^{\frac{1}{n}} = a = \max(a,b).$$
– <u>Si $b>a$,</u> en permutant a et b dans le cas précédent, on obtient que la limite est b.

7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2+n+1\right)^{\frac{1}{n}} = 1$ **:**

Solution de l'exercice 7.23

On utilise que le résultat du cours (7.2.7, n°1.a) qui dit que si une somme commporte un terme prépondérant, alors elle est équivalente à ce terme. Pour comparer des termes f et g (*i.e.* déterminer si l'un est prépondérant sur l'autre) on calcule la limite de $\frac{f}{g}$. Si c'est 0 alors $f = \mathrm{o}(g)$; si c'est $\pm\infty$ alors $g = \mathrm{o}(f)$. On trouve ici :

1. $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2 \ln x$.
2. $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -x^2$.
3. $f(x) \underset{0^+}{\sim} -\sqrt{x}\,(\ln x)^2$.
4. $f(x) \underset{0^+}{\sim} \sqrt{x} \ln x$.

Solution de l'exercice 7.24

1. Si $u = \frac{1}{x}$ on a : $xe^{\frac{1}{x}} = \frac{e^u}{u}$.
   Si x tend vers 0^+, alors u tend vers $+\infty$, donc, comme $u = \mathrm{o}(e^u)$ en $+\infty$, on a :
   $$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$
   Si x tend vers 0^- alors u tend vers $-\infty$, donc d'après les théorèmes de calcul sur les limites :
   $$\lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0.$$
   Ainsi comme les limites à gauche et à droite sont distinctes, $xe^{\frac{1}{x}}$ n'a $\boxed{\text{pas de limite}}$ quand x tend vers 0.
2. Si $u = \sqrt{x}$, on a : $\dfrac{x^3}{e^{\sqrt{x}}} = \dfrac{u^6}{e^u}$. Comme u tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et que, en $+\infty$: $u^6 = \mathrm{o}(e^u)$
   on déduit, d'après le théorèmes de composition des limites, que : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{\sqrt{x}}} = 0.}$
3. On trouve : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln\left(x^2 e^x\right) = 0$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ n'existe pas car les limites à droite et à gauches sont différentes.
5. On trouve : $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{x-1} = 0$.
6. On trouve : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} = 0$.
7. On trouve : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln xe^{-\frac{1}{x}} = -\infty$.
8. Remarquons que $x^x = e^{x\ln x}$. Or on sait que : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$.
   Donc, comme e^u tend vers 1 quand u tend vers 0, d'après le théorème de composition des limites on déduit que : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x = 1.}$

12. On trouve : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x+x^2} = 0$.

14. **Calcul de** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + 3x^2\ln(\ln x) + 2x\ln x}{x^{\frac{5}{2}}}$ **:**
    On a clairement $\ln x = \mathrm{o}(2x\ln x)$ et comme :
    $$\frac{2x\ln x}{3x^2\ln(\ln x)} = 2\frac{\ln x}{x}\frac{1}{\ln(\ln x)} \text{ tend vers 0, car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0,$$

on a $2x\ln x = \mathrm{o}\left(3x^2\ln(\ln x)\right)$. On en déduit :

$$\ln x + 3x^2\ln(\ln x) + 2x\ln x \underset{+\infty}{\sim} 3x^2\ln(\ln x).$$

Donc :

$$\frac{\ln x + 3x^2\ln(\ln x) + 2x\ln x}{x^{\frac{5}{2}}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3\ln(\ln x)}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Comme $\ln u = \mathrm{o}\,(u)$ en $+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, par changement de variable on en déduit que :

$$\ln(\ln x) = \mathrm{o}\,(\ln x) = \mathrm{o}\left(x^{\frac{1}{2}}\right).$$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x + 3x^2\ln(\ln x) + 2x\ln x}{x^{\frac{5}{2}}} = 0.}$

15. **Calcul de** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\ln x + 1}}{\sqrt{\ln x}} + \frac{\ln^3 x - \ln x}{(\ln x + 1)^3}$ **:**

Comme ln tend vers $+\infty$ en $+\infty$ on a : $1 = \mathrm{o}\,(\ln x)$, d'où :

$$\ln x + 1 \underset{+\infty}{\sim} \ln x.$$

Ainsi :

$$\sqrt{\ln x + 1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\ln x} \qquad \text{et} \qquad (\ln x + 1)^3 \underset{+\infty}{\sim} \ln^3 x.$$

Donc :

$$\frac{\sqrt{\ln x + 1}}{\sqrt{\ln x}} \underset{+\infty}{\sim} 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\ln^3 x - \ln x}{(\ln x + 1)^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^3 x - \ln x}{\ln^3} = 1 - \frac{1}{\ln^2 x}.$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\ln x + 1}}{\sqrt{\ln x}} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^3 x - \ln x}{(\ln x + 1)^3} = 1.$$

Finalement : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\ln x + 1}}{\sqrt{\ln x}} + \frac{\ln^3 x - \ln x}{(\ln x + 1)^3} = 2.}$

16. **Calcul de** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ **:**

On a :

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(\ln x)}{x} - \frac{\ln x}{x}}.$$

Comme $\ln u = \mathrm{o}\,(u)$ en $+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, par changement de variable on en déduit que :

$$\ln(\ln x) = \mathrm{o}\,(\ln x) = \mathrm{o}\,(x).$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} - \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1.}$

17. **Calcul de $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\tan 2x}$:**

On a :

$$\begin{aligned} \tan 2x &= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \\ &= \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \text{ d'après les formules de duplication} \\ &= \frac{2\frac{\sin x}{\cos x}}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \text{ en divisant le numérateur et le dénominateur par } \cos^2 x \\ &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} (\tan x)^{\tan 2x} &= e^{\tan 2x \, \ln(\tan x)} \\ &= e^{\frac{2 \tan x \, \ln(\tan x)}{1 - \tan^2 x}} \end{aligned}$$

Or quand u tend vers $+\infty$ on a :

$$\frac{2u \ln u}{1 - u^2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2 \ln u}{u},$$

qui tend vers 0. Comme $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$, on en déduit que :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2 \tan x \, \ln(\tan x)}{1 - \tan^2 x} = 0.$$

Donc : $\boxed{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\tan 2x} = 1.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.26

1. On trouve $\lim_{x \to +\infty} 2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3} = 0$.
2. On trouve $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{2}$.
3. **Calcul de $\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - \sqrt{x^4 + 1}}$:**

On a :

$$\begin{aligned} \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - \sqrt{x^4 + 1}} &= \frac{x\left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x^2\left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\right)} \\ &= \frac{1}{x} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} - 1} \end{aligned}$$

Or on sait que : $\boxed{\sqrt{1+u} - 1 \underset{u \to 0}{\sim} \frac{u}{2}.}$

Comme :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4} = 0,$$

on en déduit, par changement de variable, que :

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+\frac{1}{x^4}}-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x^4}.$$

Donc :

$$\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^4+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\frac{2x^4}{2x^2} = x.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^4+1}} = +\infty.}$$

6. **Calcul de** $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$ **:**

On essaie de se ramener à l'équivalence usuelle $\boxed{\sqrt{1+u}-1 \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u}{2}.}$

$$\begin{aligned}
\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4} &= \frac{x-2+2-\sqrt{3x-2}}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{1}{x+2}\left(1+\frac{2-\sqrt{3x-2}}{x-2}\right) \\
&= \frac{1}{x+2}\left(1+2\frac{1-\sqrt{\frac{3x-2}{4}}}{x-2}\right) \\
&= \frac{1}{x+2}\left(1+2\frac{1-\sqrt{1+\frac{3(x-2)}{4}}}{x-2}\right)
\end{aligned}$$

Comme :

$$\lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)}{4} = 0,$$

on en déduit :

$$1-\sqrt{1+\frac{3(x-2)}{4}} \underset{x\to 2}{\sim} -\frac{3(x-2)}{8}.$$

Donc :

$$\lim_{x\to 2} \frac{1-\sqrt{1+\frac{3(x-2)}{4}}}{x-2} = -\frac{3}{8}.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4} = \frac{1}{4}\left(1+2\times\left(-\frac{3}{8}\right)\right) = \frac{1}{16}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.27

1. **Calcul de** $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^a-1}$ **:**

On fait le changement de variable $h = 1-x$ *i.e.* $x = 1+h$; alors :

$$\frac{x-1}{x^a-1} = \frac{h}{(1+h)^a-1}.$$

Quand x tend vers, h tend vers 0, donc on a l'équivalence usuelle :

$$(1+h)^a - 1 \underset{0}{\sim} ah,$$

d'où, pour tout $a \neq 0$ (si $a=0$ on a $x^a - 1 = 0$ donc la fonction n'est pas définie), on a :

$$\frac{h}{(1+h)^a - 1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{a}.$$

Donc finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^a-1} = \frac{1}{a}.}$$

2. **Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - (ax+b)$:**

On fait le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ (qui tend vers 0^+). Alors :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x+1} - (ax+b) &= \sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + 1} - \left(\frac{a}{u} + b\right) \\
&= \frac{1}{u}\left(\sqrt{1 + \underbrace{u+u^2}_{=v}} - (a+bu)\right) \qquad (n.b. : u>0 \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty) \\
&= \frac{1}{u}\left(1 + \frac{1}{2}(u+u^2) + \mathrm{o}\left(u+u^2\right) - (a+bu)\right),
\end{aligned}$$

car : $\sqrt{1+v} = 1 + \frac{v}{2} + \mathrm{o}(v)$ quand v tend vers 0. Or, en 0, on a : $u+u^2 \underset{0}{\sim} u$,
Donc : $\mathrm{o}\left(u+u^2\right) = \mathrm{o}(u)$.
Et par ailleurs $u^2 = \mathrm{o}(u)$,
donc :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x+1} - (ax+b) &= \frac{1}{u}\left(1 + \frac{u}{2} + \mathrm{o}(u) - (a+bu)\right) \\
&= \frac{1-a}{u} + \left(\frac{1}{2} - b\right) + \mathrm{o}(1).
\end{aligned}$$

On conclut donc que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - (ax+b) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a>1 \\ +\infty & \text{si } a<1 \\ \frac{1}{2} - b & \text{si } a=1 \end{cases}}$$

3. **Calcul de $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$:**

On a affaire à une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. En multipliant par la quantité conjuguée on a :

$$\frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2-a^2} = \frac{(x-b)-(a-b)}{(x-a)(x+a)\left(\sqrt{x-b} + \sqrt{a-b}\right)} = \frac{1}{(x+a)\left(\sqrt{x-b} + \sqrt{a-b}\right)},$$

donc :

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2-a^2} = \frac{1}{4a\sqrt{a-b}}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.28

On trouve :

$$f(x)-\sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} 1.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.29

Posant $u = x-1$ on a :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{(u+1)-\sqrt{u+1}}\\ &= \sqrt[3]{1+u-\left(1+\frac{u}{2}+\mathrm{o}(u)\right)} \qquad \text{car } \sqrt{1+u}=1+\frac{u}{2}+\mathrm{o}(u) \text{ en } 0\\ &= \sqrt[3]{\frac{u}{2}-\mathrm{o}(u)}\end{aligned}$$

Or : $\frac{u}{2}-\mathrm{o}(u) \sim \frac{u}{2}$,
donc : $\sqrt[3]{\frac{u}{2}-\mathrm{o}(u)} \sim \left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$,
soit finalement :

$$\boxed{\sqrt[3]{x-\sqrt{x}} \underset{1}{\sim} 2^{-\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}} \qquad \textit{i.e. } \lambda = 2^{-\frac{1}{3}} \text{ et } r=\frac{1}{3}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.31

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1.$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1.$
4. $\lim\limits_{n\to +\infty} \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n = e^a.$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-1}{x} = a.$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 4x}{\sin^2 3x} = \dfrac{16}{9}.$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3+4x^2}{x^2-3x+1}\sin\dfrac{1}{x} = 2.$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln(1+x)}{\sin x} = 0.$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{x(x+2)} = \dfrac{1}{2}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} |\sin x|^x = 1.$
11. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x} = 1.$
12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{1-(1-x)^b}\dfrac{a}{b}.$
13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+27}-3}{\sqrt[4]{x+16}-2} = \dfrac{32}{27}.$
14. **Calcul de $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$:**

   On fait le changement de variable $x = 1+h$, avec h qui tend vers 0 :

$$\frac{(1+h)^2-\sqrt{1+h}}{\sqrt{1+h}-1} = \sqrt{1+h}\frac{(1+h)^{\frac{3}{2}}-1}{\sqrt{1+h}-1}.$$

   D'après l'équivalence usuelle $(1+h)^r-1 \underset{h\to 0}{\sim} rh$, on a donc :

$$\frac{(1+h)^2-\sqrt{1+h}}{\sqrt{1+h}-1} \underset{0}{\sim} \sqrt{1+h}\frac{\frac{3}{2}h}{\frac{h}{2}} = 3\sqrt{1+h}.$$

   Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 3.}$$

Autre méthode : remarquer que :

$$x^2 - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1).$$

15. **Calcul de** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ **:**

On a :

$$\begin{aligned} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) &= x^2 e^{\frac{1}{x}}\left(1 - e^{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}\right) \\ &= -x^2 e^{\frac{1}{x}}\left(e^{-\frac{1}{x(x+1)}} - 1\right) \end{aligned}$$

Comme :

$$e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u \text{ et } \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x(x+1)} = 0,$$

on a :

$$e^{-\frac{1}{x(x+1)}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x(x+1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}.$$

Donc :

$$x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{\frac{1}{x}}.$$

Donc finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) = 1.}$$

16. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{x\pi}{2}} = e^{\frac{2}{\pi}}$.

17. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x^2-3x+1)\tan\pi x = \dfrac{1}{\pi}$.

18. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x} = \dfrac{1}{e}$.

19. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{x+1}{x}} - (x-1)^{\frac{x}{x-1}} = 1$.

23. $\lim\limits_{x\to e}(\ln x - 1)\ln(x-e) = 0$,
car $\ln x - \ln e \underset{x\to e}{\sim} \ln' e(x-e)$ et que :

$$\lim_{x\to e^+}(x-e)\ln(x-e) = 0.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.33

On trouve que f est continue sur $\mathbb{R} - \{2\}$ mais pas en 2.

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.35

On trouve que f est continue sur $\mathbb{R}$ — y compris en 0.

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.36

1. **Limites de** (u_n) **et** (v_n) **:**

D'après

$$n^3 + 5883n + 12 \sim n^3 \quad \text{et} \quad n^3 + n^2 + 5 \sim n^3 \quad \text{en } +\infty,$$

on a l'équivalent $v_n \sim 1$ donc $\boxed{\lim(v_n) = 1.}$

Comme $u_n = \frac{1}{n^2}$ au voisinage de $+\infty$, et que la convergence d'une suite ne dépend que de son comportement dans un voisinage, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0}$, tout comme la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. **Continuité de** f **en 0 et 1 :**

La fonction f coincide avec $x \longmapsto x$ sur le voisinage $]-1,1[$ de 0, donc $\boxed{f \text{ est continue en } 0,}$ tout comme la fonction $x \longmapsto x$.

En 1, la continuité signifie que $\lim_1 f = f(1) = 1$, ce qui est encore équivalent à :

$$\lim_{1^+} f = \lim_{1^-} f = f(1).$$

Or sur le voisinage à gauche $]0,1[$ de 1, f coincide avec $x \longmapsto x$ qui converge vers 1 ; sur le voisinage à droite $]1,2[$ de 1, f coincide avec $x \longmapsto 1$ qui converge vers 1 ; donc $\boxed{f \text{ est continue en } 1}$.

3. **Convergence de (w_n) :**
   D'après la question précédente, la fonction f converge vers 0 en 0 et vers 1 en 1. De plus la suite (u_n) converge vers 0 et la suite (v_n) converge vers 1 ; donc $\boxed{\text{d'après le théorème de composition des limites}}$, la suite $(f(u_n))$ converge vers 0, et la suite $(f(v_n))$ converge vers 1 ; ainsi leur somme (w_n) converge vers la somme des limite, *i.e.* $\boxed{(w_n) \text{ converge vers } 1.}$

4. **Équivalent de f en 0 :**
   La fonction $\boxed{f \text{ est équivalente à } x \longmapsto x \text{ en } 0}$ car elle coincide avec elle au voisinage de 0.

5. **Équivalent de $f-1$ en 1 :**
   Par contre la fonction $f-1$ vaut 0 à droite de 1, donc elle n'est pas équivalente à droite avec $x \longmapsto x-1$ (sinon cette dernière serait nulle au voisinage de 1, ce qui est faux). Comme la fonction $f-1$ n'est pas équivalente à $x-1$ en 1^+, *a fortiori* $\boxed{f-1 \text{ n'est pas equivalente à } x-1 \text{ en } 0.}$

Solution de l'exercice 7.37

Non car f ne converge pas en 1.

Solution de l'exercice 7.38

Oui car f converge en 6. Prendre $f(6) = \dfrac{1}{6}$.

Solution du problème 7.40

1. **f_1 vérifie la condition (E) :**
   En effet, <u>si $x \neq 0$</u> on a :

$$\begin{aligned} f_1(2x) &= \frac{\sin 2x}{2x} \qquad \text{car } 2x \neq 0 \\ &= \frac{2\sin x \cos x}{2x} \\ &= \frac{\sin x}{x} \times \cos x \\ &= f_1(x)\cos x \qquad \text{car } f_1(x) = \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

Et <u>si $x = 0$</u> alors $2x = 0$ donc :

$$\begin{aligned} f_1(2x) &= 1 \\ \text{et} \qquad f_1(x) &= 1 \\ \text{donc} \qquad f_1(x)\cos x &= 1 \\ \text{donc} \qquad f_1(2x) &= f_1(x)\cos x \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f_1(2x) = f_1(x)\cos x$. Donc f_1 vérifie la condition (E).

2. **f_1 est continue :**
En effet $\boxed{f_1 \text{ est continue en tout point } x_0 \neq 0,}$ d'après les théorèmes de calcul sur les fonctions continues, car au voisinage de ces points on a : $f_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.
En $x_0 = 0$ on a : $f_1(x_0) = 1$. On sait que $\boxed{\sin x \underset{0}{\sim} x}$, donc $\dfrac{\sin x}{x} \underset{x\to 0, x\neq 0}{\sim} 1$, donc :
$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} f_1(x) = f_1(0).$$
Ainsi $\boxed{f_1 \text{ est continue en } 0.}$ On a donc montré que f_1 est continue en tout point x_0 réel.

3. **Si f vérifie (E), alors $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\dfrac{\sin x}{2^n \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$:**
Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la relation : $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\dfrac{\sin x}{2^n \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$
   - Pour $n = 1$ la relation signifie : $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$.
   Elle est vraie car, d'après la relation (E) qui est vraie pour tout x, en remplaçant $x \neq 0$ par $\frac{x}{2}$ on a :
   $$\begin{array}{rcl} f(x) & = & f\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\dfrac{x}{2} \\ \text{et} & & \\ \cos\dfrac{x}{2} & = & \dfrac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}} \qquad \text{d'après } \sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} \end{array}$$
   - Si la relation est vraie à l'ordre n, on a :
   $$\begin{array}{rcl} f(x) & = & f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\dfrac{\sin x}{2^n\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)} \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ & = & f\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{2^n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{2^n}\right)\dfrac{\sin x}{2^n\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)} \qquad \text{d'après } (E) \\ & = & f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)\dfrac{\sin x}{2^{n+1}\sin\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)} \\ \text{car } \sin\dfrac{x}{2^n} & = & 2\cos\dfrac{x}{2^{n+1}}\sin\dfrac{x}{2^{n+1}} \end{array}$$
   Donc la relation est vraie à l'ordre $n+1$.

4. **Relation entre f, $f(0)$ et f_1 :**
Pour x donné, comme la suite de terme général 2^n tend vers $+\infty$ on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0.$$
Comme f est continue en 0, on a
$$\lim_{y\to 0} f(y) = f(0).$$
Donc d'après $\boxed{\text{le théorème de composition des limites :}}$
$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$$

De plus, pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\sin \frac{x}{2^n} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{2^n} \qquad \text{car } \sin u \underset{0}{\sim} u.$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)} = \frac{\sin x}{x} = f_1(x),$$

car $x \neq 0$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)} = f(0)f_1(x).$$

Or d'après la question 3 :

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)} = f(x),$$

donc finalemement, pour tout $x \neq 0$, on a $f(x) = f(0)f_1(x)$. De plus, comme $f_1(0) = 1$ cette relation reste vraie pour $x = 0$; elle est donc vraie pour tout réel x *i.e.* $\boxed{f = f(0)f_1.}$

5. **Fonctions continues qui vérifient la relation (E) :**
D'après les questions 3 et 4 on a vu que toute fonction de ce type est de la forme $f = \lambda f_1$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{Réciproquement}}$ les fonctions de ce type vérifient (E), d'après la question 1 (en multipliant par λ), et sont continues, d'après la question 2 et les théorèmes de calcul sur les fonctions continues. On en conclut que f **est continue et vérifie la relation (E) si et seulement si elle est de la forme $f = \lambda f_1 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.**

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.42

1. **Prolongement par continuité de f en 0 :**
Il est connu que :

$$\lim_{u\to 0^+} u \ln u = 0.$$

Pour $u = -x$, d'après le théorème de composition des limites, on déduit :

$$\lim_{x\to 0^-} -x \ln(-x) = 0,$$

d'ou :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.}$$

Par ailleurs il est clair que

$$\lim_{x\to 0^+} f = \frac{0^2 - 0 - 1}{0 + 1} = -1.$$

Ainsi f se prolonge par continunité en 0 à condition de prendre $\boxed{f(0) = -1.}$

2. **Régularité de f et dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$:**
Les expressions de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ obetnues par somme, produit, quotient et/ou composée de fonctions de classe C^∞ montrent clairement que f est C^∞. On calcule alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1)(2x-1) - (x^2 - x - 1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \text{ si } x > 0. \\ f'(x) &= 2x \ln(-x) + x^2(-1)\frac{1}{-x} \\ &= x(2\ln(-x) + 1) \text{ si } x < 0. \end{aligned}$$

3. **Dérivabilité du prolongement de f en 0 :**
Par définition de la dérivabilité, le prolongement de f est dérivable en 0 si et seulement si le taux de variations $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ converge quand x tend vers 0. De plus cette convergence est équivalente à la convergence à droite et à gauche (*i.e.* quand x tend vers 0^+ et 0^-) avec égalité des deux limites.
Pour $x > 0$, comme la fraction rationelle $x \longmapsto \frac{x^2-x-1}{x+1}$ est définie en 0, le taux de variations tend vers la dérivée, on a donc :
$$\lim_{x\to 0^+} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{0^2+2\times 0}{(0+1)^2} = 0.$$
Pour $x < 0$ on a
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\ln(-x),$$
qui tend vers 0 quand x tend vers 0^-.
En conclusion le prolongement f est effectivement dérivable 0 de dérivée
$$\boxed{f'(0) = 0.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.43

1. et 2. **La fonction f est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$. :**
Car le taux de variation vaut :
$$T_x f(x+h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x)\frac{f(h)-1}{h} = f(x)T_0 f(h).$$
Comme f est dérivable en 0, quand h tend vers 0 on a :
$$\lim_{h\to 0} T_0 f(h) = f'(0),$$
donc :
$$\lim_{h\to 0} T_x f(x+h) = f(x)f'(0).$$
Donc f est dérivable en x et $\boxed{f'(x) = af(x).}$

3. **Détermination de f :**
D'après la question précédente f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$. Donc :
$$\exists\lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda e^{ax}.$$
Alors, on a :
$$f(x+y) = \lambda e^{a(x+y)} \text{ et } f(x)f(y) = \lambda e^{ax}\lambda e^{ay} = \lambda^2 e^{a(x+y)}.$$
Donc il faut que $\lambda^2 = \lambda$, soit $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$. Ainsi les fonctions possibles sont :
$$\boxed{f(x) = 0 \text{ ou } f(x) = e^{ax},\quad a \in \mathbb{R}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.44

En raisonnant de manière analogue à l'exercice 7.43 on trouve que f est dérivable en tout point et :
$$f'(x) = f'(0),$$
Donc les solutions sont :
$$\boxed{f(x) = ax,\quad a \in \mathbb{R}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.45

En raisonnant de manière analogue à l'exercice 7.43 on trouve que f est dérivable en tout point et :

$$f'(x) = f'(0)(1 - f(x)^2).$$

Puis voir le problème 6.112.

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.47

Il faut prendre $a = \dfrac{1}{4}$ et $b = \dfrac{3}{4}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.48

1. **Ensemble de définition de f :**
   Pour que le dénominateur $1 - e^{-2x}$ soit non nul, il faut et il suffit que $x \neq 0$. Ainsi $\boxed{\operatorname{dom} f = \mathbb{R} - \{0\}.}$
2. **f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} - \{0\}$:**
   La fonction f est de classe C^∞ d'après les théorèmes de calcul sur les fonctions de classe C^∞.
3. **Prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$:**
   En effet, en $x = 0$, on a :
   $$e^u = 1 + u + \mathrm{o}(u).$$
   soit, pour $u = -2x$:
   $$1 - e^{-2x} = 2x + \mathrm{o}(x) \sim 2x.$$
   d'où
   $$f(x) \equiv x \to 0\frac{x^2e^{-x}}{2x} = \frac{x}{2}e^{-x},$$
   et donc $\lim\limits_{0} f = 0$, donc f se prolonge par continuité en 0 par $\boxed{f(0) = 0.}$
4. **Dérivabilité de f en 0 :**
   D'après l'équivalent précédent on a :
   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-2x}} \sim \frac{1}{2}e^{-x}.$$
   Ainsi le prolongement de f en 0 est dérivable et on a $\boxed{f'(0) = \frac{1}{2}}$. Pour $x \neq 0$ on calcule la dérivée de f, pour voir si elle tend bien vers $\frac{1}{2}$ en 0 :
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2e^{-x})\frac{1}{1 - e^{-2x}} + x^2e^{-x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1 - e^{-2x}}\right) \\ &= \frac{(2x - x^2)e^{-x}}{1 - e^{-2x}} - \frac{2x^2e^{-3x}}{(1 - e^{-2x})^2} \end{aligned}$$
   Comme $1 - e^{-2x} \sim 2x$, en 0, on a :
   $$\frac{(2x - x^2)e^{-x}}{1 - e^{-2x}} \sim \left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-x} \sim 1 - \frac{x}{2}$$
   qui tend donc vers 1 en 0, et :
   $$\frac{2x^2e^{-3x}}{(1 - e^{-2x})^2} \sim \frac{1}{2}e^{-3x} \sim \frac{1}{2},$$

qui tend donc vers $\frac{1}{2}$. Ainsi
$$\lim_0 f' = \frac{1}{2} = f'(0).$$
Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathrm{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Autre méthode :
Comme :
$$\lim_{x \to 0,\ x \neq 0} f'(x) = \frac{1}{2},$$
et que le prolongement de f est continue sur $\mathbb{R}$, le $\boxed{\text{théorème sur la limite de la dérivée}}$ donne directement que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

SOLUTION DU PROBLÈME 7.54

1. **Relation $f \circ \varphi = \varphi \circ f$:**
   D'après $\boxed{\text{l'associativité de la composition}}$ (et non pas la commutativité qui est fausse en générale) on a :
   $$f \circ \varphi = f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f = \varphi \circ f.$$
2. **Relation $f' \circ \varphi = f'$:**
   La relation précédente se dérive en :
   $$\varphi' \times f' \circ \varphi = f' \times \varphi' \circ f.$$
   Comme $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2}$ cela s'écrit encore :
   $$\frac{1}{2} f' \circ \varphi = f' \times \frac{1}{2}.$$
   D'où le résultat annoncé en multipliant par 2.
3. **Convergence de la suite (u_n) :**
   C'est une suite arithmético-géométrique; le calcul de son terme général donne :
   $$u_n = 6 + (6 - x)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
   Donc : $\boxed{\lim(u_n) = 6.}$
4. **Relation $f'(x) = f'(6)$:**
   En utilisant la question 2 et la définition de (u_n) par récurrence, une récurrence évidente montre que :
   $$\forall n \geqslant 0,\ f'(u_n) = f'(u_0)$$
   Comme f est de classe C^1 il s'ensuit que f' est continue. Donc d'après le résultat de la question 3. on a :
   $$\lim_{n \to +\infty} f'(u_n) = f'(6).$$
   Donc : $f'(x) = f'(u_0) = f'(6)$.
5. **Fonctions f de classe C^1 telles que $f \circ f = \varphi$:**
   D'après les questions précédentes ces fonctions vérifient $f'(x) = f'(6)$, en particulier f' est constante. Comme f est définie sur l'*intervalle* $\mathbb{R}$ on en déduit que f est de la forme :
   $$f(x) = ax + b.$$

Réciproquement si f est de ce type, on a :

$$(f \circ f)(x) = a(ax+b)+b = a^2x+(a+1)b.$$

Ainsi, pour que $f \circ f = \varphi$, comme deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils mêmes coefficients, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} a^2 &= \dfrac{1}{2} \\ (a+1)b &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ (a+1)b &= 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a &= -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ (a+1)b &= 3 \end{cases},$$

soit :

$$a, b) \in \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right) \right\}.$$

Ainsi f est une des deux fonctions suivantes :

$$\boxed{f(x) = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \text{ ou } f(x) = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.59

1. **Calcul de** P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 **:**

$$\begin{array}{rcl} P_0 &=& X \\ P_1 &=& (1+X^2)P_0' = X^2+1 \\ P_2 &=& (1+X^2)(1+X^2)' = 2X^3+2X \\ P_3 &=& (1+X^2)(6X^2+2) = 6X^4+8X^2+2 \\ P_4 &=& (1+X^2)(24X^3+16X) = 24X^5+40X^3+16X \\ P_5 &=& (1+X^2)(120X^4+120X^2+16) = 120X^6+240X^4+136X^2+16 \end{array}$$

2. **Relation** $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$ **:**
Montrons $\boxed{\text{par récurrence}}$ sur $n \geqslant 1$ que $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$
– *Cas* $n=1$ *:* on a bien :

$$P_1(\tan(x)) = 1+\tan^2(x) = \tan'(x) = \tan^{(1)}(x).$$

– $(n) \Rightarrow (n+1)$: si on suppose que $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$ alors :

$$\begin{array}{rcl} \tan^{(n+1)}(x) &=& \left(\tan^{(n)}\right)'(x) \\ &=& (P_n \circ \tan))'(x) \\ &=& \tan'(x)P_n'(\tan(x)) \\ &=& (1+\tan^2(x))P_n'(\tan(x)) \\ &=& P_{n+1}(\tan(x)) \end{array}$$

3. **Développement limité de** $\tan$ **à l'ordre 5 en 0 :**
La formule de Taylor-Young à l'ordre 5 en 0 donne :

$$\tan(x) = \tan(0) + \tan'(0)x + \frac{\tan^{(2)}(0)}{2}x^2 + \frac{\tan^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{\tan^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{\tan^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \mathrm{o}\left(x^6\right).$$

Or d'après la question précédente, on a :

$$\tan^{(n)}(0) = P_n(0).$$

La première question donne :

$$P_0(0) = 0, P_1(0) = 1, P_2(0) = 0, P_3(0) = 2, P_4(0) = 0, P_5(0) = 16,$$

d'où le développement :

$$\tan(x) = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right).$$

soit $\boxed{\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right).}$

4. **Développement limité de** tan **à l'ordre 6 en 0 :**
   Comme la fonction tangente est impaire son développement limité d'ordre 6 ne comporte pas de terme de degré pair donc :

$$\boxed{\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \mathrm{o}\left(x^6\right).}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.69

1. **Développement limité de** tan **à l'ordre 3 en 0 :**
   On peut utiliser la méthode de l'exercice 7.59 ce qui revient aussi à écrire que :

$$\begin{aligned} \tan' &= 1 + \tan^2 \\ \tan'' &= 2\tan\tan' = 2\tan + 2\tan^3 \\ \tan''' &= 2\tan' + 6\tan'\tan^2 = 2 + 8\tan^2 + 6\tan^4 \end{aligned}$$

   Donc en appliquant la $\boxed{\text{formule de Taylor-Young}}$ pour tan, à l'ordre 3 en 0, on obtient :

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right).}$$

   Autre méthode : Le développement limite de tan peut aussi s'obtenir à partir de la relation :

$$\tan x = \sin x \times \frac{1}{1 + (\cos x - 1)},$$

   par composée puis produit à partir des développements connus en 0 de : $\sin x, \cos x - 1$ et $\dfrac{1}{1+u}$.

2. **Développement limité de** arctan **à l'ordre 3 en 0 :**
   On procède de même :

$$\begin{aligned} \arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \arctan''(x) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \\ \arctan'''(x) &= \frac{8x(1+x^2) - 2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^4} \end{aligned}$$

   Donc :

$$\arctan(0) = 0,\ \arctan'(0) = 1,\ \arctan''(0) = 0,\ \arctan'''(0) = -2.$$

Donc, d'après la $\boxed{\text{formule de Taylor-Young}}$ à l'ordre 3 pour arctan on obtient :

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right).}$$

Autre méthode : ce développement peut aussi s'obtenir par primitive d'un développement limité puisque :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + \mathrm{o}\left(u\right),$$

d'où :

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right).$$

3. **Équivalents en 0 de $\arctan x - \sin x$ et $\tan x - \arctan x$:**
Comme : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$, on déduit de la question précédente que :

$$\arctan x - \sin x = -\frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right),$$

donc :

$$\boxed{\arctan x - \sin x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}.}$$

De même on déduit de la question précédente :

$$\tan x - \arctan x = \frac{2x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$

Donc :

$$\boxed{\tan x - \arctan x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x^3}{3}.}$$

4. **Calcul de limite :**
D'après la question précédente on a :

$$\frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arctan x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{\frac{2x^3}{3}} = -\frac{1}{4},$$

donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arctan x} = -\frac{1}{4}.}$$

Solution de l'exercice 7.71

1. **Développements limités à l'ordre 4 en 0 de f et g :**
On sait que le développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 en 0 vaut :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}\left(x^2\right).$$

En multipliant par x^2 on obtient un développement limité à l'ordre 4 :

$$\boxed{f(x) = x^2\sqrt{1+x} = x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8} + \mathrm{o}\left(x^4\right).}$$

De même, on sait que le développement limité de exp à l'ordre 3 en 0 vaut :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$

En retranchant 1 puis en multipliant par x on obtient le développement limité à l'ordre 4 suivant :

$$\boxed{g(x) = x(e^x - 1) = x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right).}$$

2. **Calcul de limite :**
Les calculs précédents impliquent que :

$$g(x) - f(x) = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right) \sim \frac{7x^4}{24}.$$

Par ailleurs on sait que, au voisinage de 0 : $\ln(1+x) \sim x$,
d'où : $(\ln(1+x))^4 \sim x^4$,
d'où : $\frac{g(x)-f(x)}{(\ln(1+x))^4} \sim \frac{7}{24}$.

On déduit donc que :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - f(x)}{(\ln(1+x))^4} = \frac{7}{24}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.72

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{x} = \frac{1}{2}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)^2}{(1 - \cos x)^3} = \frac{2}{9}$.

5. **Limite en 0 de $\frac{e^x-1-\ln(1+x)}{x^2}$:**
Comme on a affaire à une forme indéterminée, on effectue un développement limité d'ordre 2 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right) \text{ et } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right),$$

d'où : $e^x - 1 - \ln(1+x) = x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right) \underset{0}{\sim} x^2$.
Ainsi : $\frac{e^x-1-\ln(1+x)}{x^2} \underset{0}{\sim} 1$,
Donc finalement : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \ln(1+x)}{x^2} = 1.}$

9. **Limite de h en $\frac{\pi}{6}$:**
La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en $\frac{\pi}{6}$ donne les développements limités suivants :

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{o}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{o}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\\
\cos 2x &= \cos\left(2\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(2\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{o}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ d'après } \frac{d}{dx}(\cos 2x) = -2\sin 2x\\
&= \frac{1}{2} - \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{o}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$2\sin x - 1 = 2(\sin x - \frac{1}{2}) \sim \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$1 - 2\cos 2x = 2(\frac{1}{2} - \cos 2x) \sim 2\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right),$$

d'où

$$h(x) \underset{x \to \frac{\pi}{6}}{\sim} \frac{\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{2\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi $\boxed{\lim_{\frac{\pi}{6}} h = \frac{1}{2}.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.74

1. $\cos(\sin x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^5\right)$.
6. $= e^{e^x} = e + ex + ex^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$.
8. **Développement limité d'ordre 2 en 0 de $f(x) = \frac{1}{\cos x}$:**

On compose les deux développements limités suivants :

$$\cos x = 1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)}_{=u} \text{ et } \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \mathrm{o}\left(u^2\right),$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &= 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(-\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)^2\right) \\ &= 1 - \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right) \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\boxed{\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right).}$$

9. $\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$.
12. **Développement limité d'ordre 2 en 0 de $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$:**

On sait que :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right).$$

Donc :

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right)} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)},$$

donc :

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)}\right).$$

Or par composition avec le développement limité suivant :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \mathrm{o}\left(u^3\right),$$

on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)} &= 1-\left(-\frac{x^2}{6}\right)+\left(-\frac{x^2}{6}\right)^2-\left(-\frac{x^2}{6}\right)^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\\ &= 1+\frac{x^2}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$1-\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)} = -\frac{x^2}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right),$$

donc :

$$\boxed{f(x) = -\frac{x}{6}+\mathrm{o}\left(x^2\right).}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.76

2. **Développement limité d'ordre 2 en 0 de $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{1+x}}}$:**
Quand x tend vers 0 on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right).$$

Comme cette fonction tend vers 1, pour composer les développements limités on a besoin d'un développement d'ordre 2 de exp en 1 soit, quand h tend vers 0 :

$$e^{1+h} = ee^h = e+eh+\frac{eh^2}{2}+\mathrm{o}\left(h^2\right).$$

Donc en prennant : $h = -\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)$ on a :

$$\begin{aligned}f(x) &= e+e\left(-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2\right)+\frac{e}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2\right)^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)\\ &= e-\frac{ex}{2}+\frac{e}{2}x^2++\mathrm{o}\left(x^2\right)\end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\boxed{e^{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} = e-\frac{ex}{2}+\frac{e}{2}x^2++\mathrm{o}\left(x^2\right).}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.77

1. **Prolongement par continuité de f en 1 :**

On fait le changement de variable $u = x - 1$ (qui tend vers 0). Alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x\ln(x)}{x^2-1} \\ &= \frac{(1+u)\ln(1+u)}{(u+1)^2-1} \\ &= \frac{(1+u)\ln(1+u)}{u^2+2u} \\ &\sim \frac{(1+u)u}{u^2+2u} \qquad \text{car } \ln(1+u) \underset{0}{\sim} u \\ &\sim \frac{1+u}{u+2} \end{aligned}$$

Donc, comme

$$\lim_{u\to 0} \frac{1+u}{u+2} = \frac{1}{2},$$

on déduit que :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Donc $\boxed{f \text{ se prolonge par continuité en 1 par } f(1) = \tfrac{1}{2}.}$

2. **Dérivabilité du prolongement :**
La fonction f prolongée en 1 est clairement dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ d'après les théorèmes de calcul sur les fonctions dérivables. Il reste à examiner la dérivabilité en 1. Pour tout $x \neq 1$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \frac{\frac{x\ln(x)}{x^2-1} - \frac{1}{2}}{x-1} \\ &= \frac{\frac{(1+u)\ln(1+u)}{u^2+2u} - \frac{1}{2}}{u} \qquad \text{avec } u = x-1 \\ &= \frac{(1+u)\ln(1+u) - (\frac{u^2}{2}+u)}{u(u^2+2u)} \end{aligned}$$

On exprime le taux de variation à l'aide de développements limités à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \ln(1+u) &= u - \frac{u^2}{2} + \mathrm{o}\left(u^2\right) \\ (1+u)\ln(1+u) &= u + \frac{u^2}{2} + \mathrm{o}\left(u^2\right) \\ (1+u)\ln(1+u) - \left(\frac{u^2}{2}+u\right) &= \mathrm{o}\left(u^2\right) \\ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \frac{\mathrm{o}\left(u^2\right)}{u(u^2-2u)} \\ &= \frac{\mathrm{o}\left(1\right)}{u-2} \end{aligned}$$

D'après les théorèmes de calcul sur les limites on a :

$$\lim_{u\to 0} \frac{\mathrm{o}\left(1\right)}{u-2} = 0,$$

Donc le taux de variation de f en 1 converge vers 0 *i.e.* $\boxed{f \text{ est dérivable en 1 et } f'(1) = 0.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.79

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \frac{1}{2}$.
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \left(\ln(1+x^2) - \frac{2}{3}\ln(2x+x^3)\right) = -\frac{1}{3}$.
3. **Limite de g en 0 :**
   On a les développements limités suivants (en 0) :

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right) \\
&= x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\
\sin^2 x &= x^2\left(1 - \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)^2 \\
&= x^2\left(1 - \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \text{ d'après } (1+u)^2 = 1 + 2u + \mathrm{o}\left(u\right) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
1 - \cos x &= \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\
g(x) &= \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x} \\
&= \frac{2(1-\cos x) - \sin^2 x}{\sin^2 x(1-\cos x)} \\
&= \frac{x^2\left(\left(1 - \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)\right)}{x^2\left(1 - \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)\frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)} \\
&= \frac{x^4\left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \mathrm{o}\left(1\right)\right)}{x^2\left(1 + \mathrm{o}\left(1\right)\right)\frac{x^2}{2}\left(1 + \mathrm{o}\left(1\right)\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{4} + \mathrm{o}\left(1\right)}{\frac{1}{2} + \mathrm{o}\left(1\right)}
\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\lim\limits_{0} g = \frac{1}{2}.}$

   Autre méthode :
   On remarque que
$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = (1-\cos(x))(1+\cos(x)),$$
   d'où
$$g(x) = \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x} = \frac{2-(1+\cos(x))}{(1-\cos(x))(1+\cos(x))} = \frac{1}{1+\cos(x)},$$
   qui tend vers $\frac{1}{2}$ en 0.
4. **Limite en 0 de $\dfrac{\ln(1+\sin x) - \sin x}{1-\cos(\sin x)}$. :**
   D'après les développements limités usuels, au voisinage de 0, à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$ et $\cos u$ on a :
$$\ln(1+u) - u \underset{u\to 0}{\sim} -\frac{u^2}{2} \text{ et } 1 - \cos u \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u^2}{2}.$$

D'où : $\dfrac{\ln(1+u)-u}{1-\cos u} \underset{0}{\sim} \dfrac{-\frac{u^2}{2}}{\frac{u^2}{2}} = -1.$
Ainsi $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)-u}{1-\cos u} = -1.$
Comme $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$, d'après le $\boxed{\text{théorème de composition des limites}}$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)-\sin x}{1-\cos(\sin x)} = -1.}$$

9. **Convergence de (u_n) :**
On écrit

$$\left(\frac{e^{\frac{a}{n}}-e^{-\frac{a}{n}}}{2\frac{a}{n}}\right)^{n^2} \quad = \quad e^{n^2 \ln\left(\frac{e^{\frac{a}{n}}-e^{-\frac{a}{n}}}{2\frac{a}{n}}\right)}$$

Quand n tend vers $+\infty$, on sait que $\frac{a}{n}$ tend vers 0. Par ailleurs en 0 on a :

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\\
e^{-x} &= 1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\\
e^x-e^{-x} &= 2x+\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\\
\frac{e^x-e^{-x}}{2x} &= 1+\frac{x^2}{6}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\\
\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2x}\right) &= \frac{x^2}{6}+\mathrm{o}\left(x^2\right),
\end{aligned}$$

d'après $\ln(1+u) = u+\mathrm{o}(u)$. Ainsi, pour $x = \frac{a}{n}$ on a :

$$u_n = e^{n^2\left(\frac{a^2}{6n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{\frac{a^2}{6}+\mathrm{o}(1)},$$

d'où $\boxed{\lim(u_n) = e^{\frac{a^2}{6}}.}$

11. **Limite de (u_n) :**
On a

$$u_n = \exp\left(n\ln\left(\cos\frac{a}{n}+y\sin\frac{a}{n}\right)\right).$$

Or, $\frac{a}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc :

$$\begin{aligned}
\cos\frac{a}{n} &= 1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{n}\right)^2+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)^2\\
\sin\frac{a}{n} &= \frac{a}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\\
\cos\frac{a}{n}+y\sin\frac{a}{n} &= 1+\frac{ya}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{n}\right)^2+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)^2\\
&= 1+\frac{ya}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\\
\ln\left(\cos\frac{a}{n}+y\sin\frac{a}{n}\right) &= \frac{ya}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ d'après } \ln(1+u) = u+\mathrm{o}(u)\\
n\ln\left(\cos\frac{a}{n}+y\sin\frac{a}{n}\right) &= ya+\mathrm{o}(1)
\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(\cos\frac{a}{n} + y\sin\frac{a}{n}\right) = ya.$$

Donc $\boxed{\lim(u_n) = e^{ya}.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.80

Faire le dévelopement limité à l'ordre 4 de f en 0 et reconnaitre $f^{(4)}(0)$ dans ce développement grâce à la formule de Taylor, plutôt que le calcul de $f^{(4)}$ qui donne :

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= \frac{\cos(x)}{1+x+x^2} - \frac{4\sin(x)\,(1+2\,x)}{(1+x+x^2)^2} + \frac{12\cos(x)}{(1+x+x^2)^2} - \frac{12\cos(x)\,(1+2\,x)^2}{(1+x+x^2)^3} + \frac{24\sin(x)\,(1+2\,x)^3}{(1+x+x^2)^4} \\ &\quad - \frac{48\sin(x)\,(1+2\,x)}{(1+x+x^2)^3} - \frac{72\cos(x)\,(1+2\,x)^2}{(1+x+x^2)^4} + \frac{24\cos(x)}{(1+x+x^2)^3} + \frac{24\cos(x)\,(1+2\,x)^4}{(1+x+x^2)^5}. \end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.82

Calcul de α, β.

On effectue un développement limité de f en 0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\beta x^2} &= 1 - \beta x^2 + \beta^2 x^4 - \beta^3 x^6 + \mathrm{o}\left(x^7\right) \\ x(1+\alpha x)^2 &= x + 2\alpha x^2 + \alpha^2 x^3 \\ \frac{x(1+\alpha x)^2}{1+\beta x^2} &= (x + 2\alpha x^2 + \alpha^2 x^3)(1 - \beta x^2 + \beta^2 x^4 - \beta^3 x^6 + \mathrm{o}\left(x^7\right)) \\ &= x + 2\,\alpha\,x^2 + (\alpha^2 - \beta)\,x^3 - 2\,\alpha\,\beta\,x^4 + (-\alpha^2 + \beta)\,\beta\,x^5 + 2\,\alpha\,\beta^2\,x^6 + (\alpha^2 - \beta)\,\beta^2\,x^7 + \mathrm{o}\left(x^7\right) \\ \sin(x) &= x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 - \frac{1}{5040}\,x^7 + \mathrm{o}\left(x^7\right) \\ f(x) &= -2\,\alpha\,x^2 + (-\alpha^2 + \beta - \frac{1}{6})\,x^3 + 2\,\alpha\,\beta\,x^4 + (\frac{1}{120} - (-\alpha^2 + \beta)\,\beta)\,x^5 - 2\,\alpha\,\beta^2\,x^6 \\ &\quad + (-\frac{1}{5040} + (-\alpha^2 + \beta)\,\beta^2)\,x^7 + \mathrm{o}\left(x^7\right) \end{aligned}$$

Pour que f soit un $\mathrm{o}\left(x^n\right)$ avec n le plus grand possible il faut donc que

$$\alpha = 0, -\alpha^2 + \beta - \frac{1}{6} = 0$$

soit $\boxed{\alpha = 0 \text{ et } \beta = \frac{1}{6}}$; alors $f(x) = \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{36}\right)x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right)$, soit $f \sim -\frac{7}{360}x^5$.

Solutions des exercices du chapitre 8

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.1

1. Étudier séparément les cas $a \leqslant b$ et $a \geqslant b$.
2. On trouve :

$$\boxed{\min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}.}$$

Comme $\min(a,b,c) = \min(a, \min(b,c))$ on trouve :

$$\begin{aligned}\min(a,b,c) = \frac{a+\min(b,c)-|a-\min(b,c)|}{2} & \\ &= \frac{1}{2}\left(a+\frac{b+c-|b-c|}{2}-\left|a-\frac{b+c-|b-c|}{2}\right|\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2a+b+c-|b-c|-|2a-b-c+|b-c||\right).\end{aligned}$$

3. Utiliser les questions précédente en remarquant que :

$$f(a,b,c) = \min(\max(a,b), \max(b,c), \max(a,c)).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.3

Rappelons que :
- Pour encadrer une fonction f il suffit de majorer $|f|$.
- Pour majorer un quotient de deux nombres positifs il suffit de majorer le numérateur et de *minorer* le dénominateur par un minorant non nul, *i.e.* :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant N(x) \leqslant N_0 \\ 0 < D_0 \leqslant D(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{N(x)}{D(x)} \leqslant \frac{N_0}{D_0}.}$$

Sachant que les fonctions puissance sont croissantes on trouve par exemple :

1. $|f(x)| \leqslant \frac{5}{6}$ *i.e.* $\boxed{-\frac{5}{6} \leqslant f(x) \leqslant \frac{5}{6}.}$
2. Comme $1+x+x^2 \geqslant \frac{3}{4}$ pour tout x, on a :

$$\boxed{0 \leqslant f(x) \leqslant \left(\frac{2^{\frac{3}{2}}+\sqrt{\sqrt{2^2+1}+1}}{\frac{3}{4}}\right)^2.}$$

3. $|f(x)| \leqslant 1$ *i.e.* $\boxed{-1 \leqslant f(x) \leqslant 1.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.4

Prendre :

$$\lambda = \min_{[} a,b] \frac{f}{g} - 1,$$

qui existe et est non nul d'après le théorème de Weierstrass.

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.5

1. f est croissante comme somme de fonctions croissantes.
2. f est décroissante comme inverse d'une fonction croissante positive.
3. f est croissante comme quotient d'une fonction croissante par une fonction décroissante toutes les deux positives.
4. Comme $x^{\frac{1}{4}} + \sqrt{x} \geqslant 0$, f est croissante, comme composée de fonctions croissantes :
$$\mathbb{R}_+ \xrightarrow{x \mapsto x^{\frac{1}{4}} + \sqrt{x}} \mathbb{R}_+ \xrightarrow{X^5} \mathbb{R}.$$
5. Comme $x^6 + 7x^2 + 3 \geqslant 3$ et que la fonction $x \mapsto x^2 - 6x + 5$ est croissante sur $[3, +\infty[$, f est croissante, comme composée de fonctions croissantes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.6

1. **Variations de f définie par $f(x) = x + \sqrt{x-1}$:**
La fonction f est définie sur $\mathcal{D}f = [1, +\infty[$ et croissante, comme somme de fonctions croissantes.
2. **Variations de f définie par $f(x) = x\sqrt{x-1}$:**
La fonction f est définie sur $\mathcal{D}f = [1, +\infty[$ et croissante, comme produit de fonctions croissantes positives.
3. **Variations de f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 2$:**
D'après le cours on sait que :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	|	$\nearrow$	

4. **Variations de f définie par $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$:**
On remarque que f est la fonction précédente composée avec la fonction $x \mapsto x^2$; il suffit donc de placer x^2 par rapport à $\dfrac{3}{2}$ pour connaître le sens de variations :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
x^2		$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	
$f(x)$		$\searrow$	|	$\nearrow$	|	$\searrow$	|	$\nearrow$	

5. **Variations de f définie par $f(x) = \dfrac{-2x+1}{3-x}$:**
Comme :
$$f(x) = \frac{-2x+6-5}{3-x} = 2 - \frac{5}{3-x},$$
d'après le cours on sait que :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	||	$\searrow$	

6. **Variations de f définie par $f(x) = \dfrac{-2x^2+1}{3-x^2}$:**

On remarque que f est la fonction précédente composée avec la fonction $x \mapsto x^2$; il suffit donc de placer x^2 par rapport à 3 pour connaître le sens de variation :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2		$\searrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

7. **Variations de f définie par $f(x) = x^2 - |x-1|$:**
On a :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x^2 - \vert x-1\vert$				$x^2 - x + 1$				$x^2 + x - 1$	
$x^2 - x + 1$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
$x^2 + x - 1$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

8. **Variations de f définie par $f(x) = |x^2 - 1|$:**

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\vert x^2 - 1\vert$		$x^2 - 1$			$1 - x^2$			$x^2 - 1$	
$x^2 - 1$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

9. **Variations de f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x+1|}}$:**

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\frac{1}{\sqrt{-x-1}}$		$\frac{1}{\sqrt{x+1}}$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

10. **Variations de f définie par $f(x) = \sqrt{|x(x-2)|}$:**

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$\vert x(x-2)\vert$		$x^2 - 2x$			$2x - x^2$			$x^2 - 2x$	
$x^2 - 2x$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

11. **Variations de f définie par $f(x) = \sqrt{\left|\dfrac{x}{x+1}\right|}$:**

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$\left\vert\frac{x}{x+1}\right\vert$		$\frac{x}{x+1}$	$\Vert$	$-\frac{x}{x+1}$		$\frac{x}{x+1}$	
$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$		$\nearrow$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.8

1. **Variations de f définie par $f(x) = x^2 - 6|x| + 5$:**
La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et paire. Il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$ où on a :
$$f(x) = x^2 - 6x + 5.$$
D'où :

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

2. **Variations de f définie par $f(x) = \dfrac{-3|x| + 2}{3 + |x|}$:**
La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et paire. Il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$ où on a :
$$f(x) = \frac{-3x + 2}{3 + x} = -3 + \frac{11}{3 + x},$$
qui est décroissante. D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗		↘	

3. **Variations de f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2|x|}$:**
La fonction est définie sur $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\cup \{0\}$ et paire. Il suffit donc de l'étudier sur $[2, +\infty[$ où on a :
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x},$$
qui est croissante (puisque $x \mapsto x^2 - 2x$ croît sur $[1, +\infty[$). D'où :

x	$-\infty$		-2	0	2		$+\infty$
$f(x)$		↘		0		↗	

SOLUTION DU PROBLÈME 8.12

1. **La restriction de f à $[a_j, a_{j+1}]$ est affine :**
Pour $x \in [a_j, a_{j+1}]$ on a :
$$a_0 < \cdots < a_j \leqslant x \leqslant a_{j+1} < \cdots < a_n,$$
d'où
$$|x - a_k| = \begin{cases} x - a_k & \text{si } k \leqslant j \\ -x + a_k & \text{si } k \geqslant j + 1 \end{cases}$$
Ainsi
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} |x - a_k| \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{j} (x - a_k) + \sum_{k=j+1}^{n} (-x + a_k) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left((j+1)x - \sum_{k=0}^{j} a_k - (n-j)x + \sum_{k=j+1}^{n} a_k \right) \\ &= \frac{(j+1) - (n-j)}{n} x + \frac{1}{n} \left(-\sum_{k=0}^{j} a_k + \sum_{k=j+1}^{n} a_k \right) \end{aligned}$$

Ainsi f est bien affine de la forme $f(x) = \alpha_j x + \beta_j$ ...

2. **Calcul de α_j :**

... avec $\boxed{\alpha_j = \dfrac{(j+1)-(n-j)}{n} = \dfrac{2j+1-n}{n}.}$

3. **Sens des variations de f sur $[-1,1]$. :**

D'après la question 1, le sens de variation de f est donné sur l'intervalle $[a_j, a_{j+1}]$ par le signe de α_j, c'est-à-dire, d'après la question 2, par celui de $(2j+1)-n$. Deux cas se présentent donc :

– <u>si n est pair $(n = 2p)$</u> : alors on a le tableau de variations suivant :

j	0		p		$p+1$		n
α_j		$-$		$\frac{1}{n}$		$+$	
x	-1		a_p		a_{p+1}		1
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

– <u>si n est impair $(n = 2p+1)$</u> : alors on a le tableau de variations suivant :

j	0		p		$p+1$		n
α_j		$-$		0		$+$	
x	-1		a_p		a_{p+1}		1
f		$\searrow$		$\rightarrow$		$\nearrow$	

4. **Valeur de x où f est minimale sur $[-1,1]$:**

D'après la question précédente, on voit que :

– <u>si n est pair $(n = 2p)$</u> : f atteint son minimum en $x = a_p$;

– <u>si n est impair $(n = 2p+1)$</u> : f atteint son minimum en toute valeur $x \in [a_p, a_{p+1}]$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.13

1. La suite (u_n) décroît comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. La suite (u_n) décroît comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. La suite (u_n) décroît comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{3x^2+2x+1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Comme la suite est à termes positifs et que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \begin{cases} = 2 & \text{si } n = 1 \\ \leqslant 1 & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

La suite (u_n) n'est pas monotone ; par contre elle est décroissante à partir de $n = 2$.

5. La suite (u_n) est croissante car, pour tout n, on a : $u_{n+1} - u_n = 2\left(1 + (-1)^n\right) \geqslant 0$.
6. La suite (u_n) est croissante car, pour tout n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n^2(n+1)! - 1}{n(n+1)} \geqslant 0$.
7. La suite (u_n) est décroissante car, pour tout n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} - 1}{2^{n+1}} \leqslant 0$.
8. La suite (u_n) est croissante car, pour tout n, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \text{ (télescopage)} \\ &= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0. \end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.15

Voir le corrigé de l'exercice 8.76.

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.19

8. **Étude des variations de la fonction f définie par $f(x) = \ln|\ln x|$:**
La fonction f est définie et dérivable quand $x > 0$ et $\ln x \neq 0$ soit :

$$\mathcal{D}f =]0,1[\cup]1,+\infty[.$$

Sachant que, pour tout $y \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$\frac{d\ln|y|}{dy} = \frac{1}{y},$$

on déduit que :

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln x}.$$

D'où :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$\|$	$\searrow$	$\|$	$\nearrow$	

N.B. : il est aussi possible d'obtenir ce résultat grâce aux théorèmes de calcul sur les fonctions monotones.

10. **Étude des variations de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + x + 6\ln x$:**
La fonction f est définie et dérivable sur $\mathcal{D}f = \mathbb{R}_+^*$. Et on a alors :

$$f'(x) = -2x + 1 + \frac{6}{x} = \frac{-2x^2 + x + 6}{x} = \frac{(x-2)(-2x-3)}{x}.$$

D'où :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$		$-$	
$f(x)$	$\|$	$\nearrow$		$\searrow$	

19. **Étude des variations de la fonction f définie par $f(x) = x + \ln(2 - e^x)$:**
La fonction f est définie et dérivable en tout point x tel que $e^x < 2$ soit sur :

$$\mathcal{D}f =]-\infty, \ln 2[.$$

Et on a alors :

$$f'(x) = 1 + \frac{-e^x}{2 - e^x} = \frac{2 - 2e^x}{2 - e^x}.$$

D'où :

x	$-\infty$		0		$\ln 2$
$f'(x)$		$+$		$-$	$\|$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	$\|$

N.B. : il est aussi possible d'obtenir ce résultat grâce aux théorèmes de calcul sur les fonctions monotones si on remarque que :

$$f(x) = \ln\left(e^x\left(2 - e^x\right)\right).$$

20. **Étude des variations de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x^2-4}{(x-2)^2(x+1)}$:**

La fonction f est définie et dérivable sur :

$$\mathcal{D}f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}.$$

Et on a alors :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{6x(x-2)^2(x+1) - (3x^2-4)\left(2(x-2)(x+1)+(x-2)^2\right)}{(x-2)^4(x+1)^2} \\
&= \frac{6x(x-2)(x+1) - (3x^2-4)\left(2(x+1)+(x-2)\right)}{(x-2)^3(x+1)^2} \\
&= \frac{6x(x^2-x-2) - (3x^2-4)(3x)}{(x-2)^3(x+1)^2} \\
&= \frac{3x\left(2(x^2-x-2)-(3x^2-4)\right)}{(x-2)^3(x+1)^2} \\
&= \frac{3x(-x^2-2x)}{(x-2)^3(x+1)^2} \\
&= \frac{-3x^2(x+2)}{(x-2)^3(x+1)^2}
\end{aligned}$$

D'où :

x	$-\infty$	-2	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$\|$	$+$	$+$	$\|$ $-$
$nf(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\|$ $\searrow$

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.21

1. Étudier la fonction définie par $f(x) = \ln x - x + 1$.
2. D'après la question 1, on a :

$$\ln \frac{x_k}{a} \leqslant \frac{x_k}{a} - 1,$$

qui donne :

$$\ln x_k \leqslant \ln a \frac{1}{a}(x_k - a).$$

Ensuite on somme ces inégalités pour $k = 1$ à $k = n$; on obtient, après simplifications :

$$\ln(x_1 x_2 \cdots x_n) \leqslant \ln \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Comme $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{\ln x}{n}}$ et que la fonction exponentielle est croissante on en déduit le résultat annoncé.

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.31

1. La surface latérale S_1 de la boite de conserve est un rectangle de hauteur h et de longueur ℓ égale au périmètre du cercle sur lequel s'appuie cette surface *i.e.* $\ell = 2\pi r$, donc :

$$S_1 = 2\pi r h.$$

Le fond et le couvercle de la boîte sont de disques de rayon r chacun de surface

$$S_2 = S_3 = \pi r^2.$$

La surface totale de la boîte de conserve est donc une fonction des deux variables r et h donnée par :

$$\boxed{S = S_1 + S_2 + S_3 = 2\pi r^2 + 2\pi r h.}$$

Comme le volume $\boxed{V = \pi r^2 h}$ est une constante donnée, les variables r et h sont reliée par la relation :

$$h = \frac{V}{2\pi r^2}.$$

Donc on a :

$$S = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}.$$

Étudions les variations de cette fonction $r \mapsto S$ pour déterminer son minimum éventuel. C'est une fonction définie pour $r > 0$ et dérivable ; on a :

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}.$$

Donc :

r	0	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$+\infty$
$\frac{dS}{dr}$	$-$		$+$
S	$\searrow$		$\nearrow$

Cela montre que la surface S est minimale lorsque :

$$\boxed{r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.}$$

Comme $V = \pi r^2 h$, cette relation s'écrit aussi :

$$r^3 = \frac{V}{2\pi} = 2r^2 h,$$

soit $\boxed{r = \frac{h}{2}.}$ Ainsi la boite de conserve cylindrique idéale a son diamètre égal à sa hauteur.

2. Avec les notations de l'énoncé, une boîte de conserve en forme de pavé a une surface totale et un volume donnés par :

$$S = 2(2r)^2 + 4(2r)h = 8r^2 + 8rh \text{ et } V = (2r)^2 h = 4r^2 h.$$

Ainsi les formules sont celles de la question 1, à condition de remplacer π par 4. Comme les calculs de la question 1 sont valables pour n'importe quelle valeur de la constante (strictement positive) π on en déduit que la conclusion de la question 1 reste vraie *i.e.* $\boxed{r = \frac{h}{2}.}$

Solution de l'exercice 8.35

1. On utilise l'expression conjuguée :

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} < \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

2. On somme les inégalités de la question 1 de $k=1$ à $k=n$:
$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1}-\sqrt{k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$
La première somme se simplifie par télescopage ; en divisant tout par 2 on obtient exactement :
$$u_n > 2\left(\sqrt{n+1}-1\right).$$
3. Comme :
$$\lim_{n\to+\infty} 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) = +\infty,$$
d'après le théorème des gendarmes, l'inégalité de la question 2 entraîne :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

Solution de l'exercice 8.36

1. Par récurrence sur n. Le passage de n à $n+1$ utilise l'inégalité suivante :
$$\frac{n\sqrt{n}}{2}+\sqrt{n+1} \geqslant \frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{2}.$$
2. Comme :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt{n}}{2} = +\infty,$$
d'après le théorème des gendarmes, l'inégalité de la question 1 entraîne :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$
3. On a :
$$v_n = u_{2n}-u_n = \sum_{k=0}^{2n}\sqrt{k}-\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k} = \sum_{k=n+1}^{2n}\sqrt{k},$$
par télescopage. Par ailleurs pour tout $k\in\{n+1,2n\}$ on a :
$$\sqrt{n+1}\leqslant\sqrt{k}\leqslant\sqrt{2n}.$$
En sommant ces inégalités de $k=n+1$ à $k=2n$ on obtient :
$$n\sqrt{n+1}\leqslant\sum_{k=n+1}^{2n}\sqrt{k}\leqslant n\sqrt{2n},$$
d'où l'inégalité annoncée.
4. D'après la question 3 on a :
$$\frac{v_n}{n}\geqslant\sqrt{n+1}.$$
Comme :
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+1} = +\infty,$$
d'après le théorème des gendarmes, on a :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{n} = +\infty.}$$

D'après la question 3 on a :

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n} \leqslant \frac{v_n}{n^2} \leqslant \frac{\sqrt{2n}}{n}.$$

Comme :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n}}{n} = 0,$$

d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n^2} = 0.}$$

Solution de l'exercice 8.38

Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$ on a :

$$n^2 \leqslant n^2 + k \leqslant n^2 + n \leqslant n^2 + n^2 = 2n^2,$$

donc, comme tout est positif, on a :

$$\frac{1}{2n^2} \leqslant \frac{1}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

En sommant ces inégalités de $k = 1$ à $k = n$ on obtient :

$$n \times \frac{1}{2n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} \leqslant n \times \frac{1}{n^2},$$

soit :

$$\boxed{\frac{1}{2n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.}$$

Comme :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

Solution de l'exercice 8.43

1. **Relation $\forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant e^x - 1 \leqslant ex$:**

   La fonction $x \overset{g}{\longmapsto} e^x - 1 - ex$ est dérivable ; on calcule sa dérivée pour étudier ses variations :

   $$g'(x) = e^x - e.$$

   On voit que g' est une fonction croissante, puisque exp l'est. Et $g'(1) = e^1 - e = 0$; donc g' croît sur $[0,1]$ de $g'(0)$ à 0 ; elle est donc négative. Par conséquent $\boxed{g \text{ décroît.}}$ Or $g(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$, donc $\boxed{g \text{ est négative}}$ puisqu'elle décroît à partir de 0. Ceci s'écrit encore :

   $$\forall x \in [0,1],\ e^x - 1 - ex \leqslant 0.$$

   Par ailleurs la fonction $x \overset{g}{\longmapsto} e^x - 1$ est croissante et vaut 0 en $x = 0$; elle est donc positive, soit finalement :

   $$\boxed{\forall x \in [0,1], 0 \leqslant\ e^x - 1 \leqslant ex.}$$

2. **Majoration de $|f(x)-x|$ sur $[0,1]$:**
On multiplie l'inégalité précédente par $x \in [0,1]$ $\boxed{\text{qui est un nombre positif.}}$ On obtient alors :

$$\forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant xe^x - x \leqslant ex^2,$$

soit

$$\forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant f(x) - x \leqslant ex^2.$$

Alors $|f(x)-x| = f(x) - x \leqslant ex^2$ *i.e.* :

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ |f(x)-x| \leqslant ex^2.}$$

3. **Calcul et limite de (v_n) :**
On a :

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n+1}{2n} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Comme la suite de terme général $\frac{1}{n}$ tend vers 0, on voit, d'après les théorèmes de calcul sur les limite, que $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ converge vers } \frac{1}{2}.}$

4. **Calcul et limite de (w_n) :**
On a :

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{n} e\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 \\ &= \frac{e}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{e}{n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{e}{3}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) \end{aligned}$$

Comme la suite de terme général $\frac{1}{n}$ tend vers 0, on voit, d'après les théorèmes de calcul sur les limite, que $\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ converge vers } 0.}$

5. **Encadrement de (u_n) :**
Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $k \leqslant n \leqslant n^2$, d'où

$$\frac{k}{n^2} \in [0,1].$$

On peut donc utiliser la majoration obtenue à la question 2 :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \ \left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} \right| \leqslant e \left(\frac{k}{n^2}\right)^2.$$

Or, d'après $\boxed{\text{la relation } |x + x'| \leqslant |x| + |x'|}$ on a :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} \right|,$$

d'où

$$|u_n - v_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} e \left(\frac{k}{n^2}\right)^2 = w_n.$$

Or l'égalité $\boxed{|u_n - v_n| \leqslant w_n}$ équivaut à :

$$v_n - w_n \leqslant u_n \leqslant v_n + w_n.$$

6. **Convergence et limite de (u_n) :**
   D'après les questions 3 et 4 et les théorèmes de calcul sur les limites, on voit que les suites de terme général $\boxed{v_n - w_n \text{ et } v_n + w_n \text{ convergent vers}}$ $\frac{1}{2} - 0$ et $\frac{1}{2} + 0$, c'est-à dire qu'elles ont $\boxed{\text{la même limite.}}$ D'après le $\boxed{\text{théorème d'encadrement (dit "des gendarmes")}}$ on en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ converge elle aussi vers } \frac{1}{2}.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.45

Remarquons d'abord que cette suite est bien définie puisque f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall x > 0, \ f(x) > 0.$$

1. **Relation $u_n \geqslant 2.$:**
   Montrons $\boxed{\text{par récurrence}}$ sur $n \geqslant 1$ $\boxed{\text{la relation } 2 \leqslant u_n \leqslant 6.}$
   - <u>Pour $n = 1$:</u> elle est vraie puisque $u_1 = f(u_0) = f(1) = \dfrac{12}{2} = 6.$
   - <u>Si elle est vraie à l'ordre n alors :</u>
     D'après l'expression suivante :
     $$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{9}{2x},$$
     et les théorèmes de calcul sur les fonctions monotones, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, de $2 \leqslant u_n \leqslant 6$ on déduit que :
     $$f(6) \leqslant f(u_n) \leqslant f(2),$$
     soit :
     $$\frac{27}{12} \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{15}{4}.$$
     Comme $2 \leqslant \dfrac{27}{12}$ et $\dfrac{15}{4} \leqslant 6$ on en déduit que :
     $$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,$$
     donc la relation est vérifiée à l'ordre $n + 1$.

2. **Relation** $|u_{n+2}-3| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$ **:**

   Montrons cette relation $\boxed{\text{par récurrence}}$ sur $n \geqslant 0$:
   - Pour $n = 0$: elle est vraie puisque :

   $$u_2 = f(u_1) = f(6) = \frac{27}{12},$$

   donc :

   $$|u_2 - 3| = \left|-\frac{9}{12}\right| \leqslant 1 = \left(\frac{3}{4}\right)^0.$$

   - Si elle est vraie à l'ordre n alors :

   $$\begin{aligned}
   |u_{n+3}-3| &= |f(u_{n+2})-3| \\
   &= \left|\frac{3u_{n+2}+9}{2u_{n+2}} - 3\right| \\
   &= \left|\frac{9-3u_{n+2}}{2u_{n+2}}\right| \\
   &= \frac{3}{2} \times \frac{|u_{n+2}-3|}{|u_{n+2}|} \\
   &\leqslant \frac{3}{2} \times \frac{1}{|u_{n+2}|}\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
   &\leqslant \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{d'après la question 1} \\
   &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}
   \end{aligned}$$

   Donc la relation est vérifiée à l'ordre $n+1$.

3. **Convergence et limite de la suite** (u_n) **:**

   Comme :

   $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0,$$

   d'après le théorème des gendarmes, l'inégalité de la question 2 donne :

   $$\boxed{\lim(u_n) = 3.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.49

On a :

$$|u_n - 2| = \left|\frac{f(-n^2+6)(-1)^{3n^3-n^2} - 2n}{n^2}\right| \leqslant \frac{|f(-n^2+6)|}{n^2} + \frac{2}{n} \leqslant \frac{M}{n^2} + \frac{2}{n},$$

et le majorant tend vers 0. Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim(u_n) = 2.}$$

Solution de l'exercice 8.51

On sait que, au voisinage de $+\infty$: $\boxed{\ln x = \mathrm{o}(x) \text{ et } x^\alpha = \mathrm{o}(e^x)}$.
Donc : $xe^{2x} - x(1+\ln x) - x^7 = x\left(e^{2x} - x^6 - \ln x - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} xe^{2x}$.
De plus, comme sin est bornée, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$,
donc $\boxed{\sin x = \mathrm{o}(x) = \mathrm{o}\left(x^2\right).}$
Enfin, d'après les théorèmes de calcul sur les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = 0$,
soit $\boxed{e^{\frac{1}{x}} = \mathrm{o}\left(x^2\right).}$
On déduit donc que : $e^{\frac{1}{x}} - \sin x + x^2 \underset{+\infty}{\sim} x^2$
d'où : $\frac{xe^{2x}-x(1+\ln x)-x^7}{e^{\frac{1}{x}}-\sin x+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{xe^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}}{x}$.
Comme $x = \mathrm{o}\left(e^{2x}\right)$ on déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{2x} - x(1+\ln x) - x^7}{e^{\frac{1}{x}} - \sin x + x^2} = +\infty.}$$

Solution de l'exercice 8.59

D'après les hypothèses de régularité sur f et g la fonction $(g-f)'$ est dérivable de dérivée :

$$(g-f)'' = g'' - f'' \geqslant 0 \qquad \text{d'après la relation } f'' \leqslant g''.$$

Donc, d'après le $\boxed{\text{principe de Lagrange,}}$ la fonction $(g-f)'$ est croissante. Par ailleurs, d'après les hypothèses sur les valeurs de f et g en a et b, on a :

$$(g-f)(a) = (g-f)(b) = 0.$$

Comme $g-f$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ (puisqu'elle est de classe C^2), d'après le $\boxed{\text{théorème de Rolle,}}$ il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$(g-f)'(c) = 0.$$

Comme $(g-f)'$ est décroissante et s'annule en c on a le tableau de variations suivant :

x	a		c		b
$(g-f)'$			$\nearrow$		
$(g-f)'$		$-$	0	$+$	
$g-f$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Ce qui montre bien que $g - f \leqslant 0$, soit $\boxed{g \leqslant f.}$
N.B. : dans ce tableau de variations les flèches indiquent des monotonies au sens large et non des monotonies strictes.

Solution de l'exercice 8.83

1. $v_n \leqslant u_n$ car $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.
2. (u_n) décroît car $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
3. (v_n) croît car $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$.

4. On a :
$$0 \leqslant u_n - v_n = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$
Or
$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < \frac{1}{2n\sqrt{n}}.$$
Soit :
$$0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \frac{u_n}{2n} \leqslant \frac{u_1}{2n}.$$
5. D'après la question précédente et le théorème des gendarmes la suite de terme général $u_n - v_n$ tend vers 0.
6. D'après tout ce qui précède les suites (u_n) et (v_n) sont adjacente donc elle convergent vers la même limite.

Solution de l'exercice 8.87

2. Montrer les deux inégalités séparément par récurrence.
3. Converge vers $\frac{2}{3}$ d'après la question précédente et le théorème des gendarmes.
4. Converge vers :
$$\int_0^1 \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3}.$$

Solution de l'exercice 8.90

1.
$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\frac{k^2}{n^2}}{1 + 8\frac{k^3}{n^3}},$$
converge vers $\boxed{\int_0^1 \frac{x^2}{1+8x^3}\, dx}$ d'après le théorème sur les sommes de Riemann (qui est utilisable car la fonction $x \longmapsto \frac{x^2}{1+8x^3}$ est continue sur $[0,1]$).
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+8x^3}\, dx = \left[\frac{1}{24} \ln(1+8x^3) \right]_0^1 = \frac{1}{12} \ln 3.$

Solution de l'exercice 8.91

1. $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} f\left(\frac{k-n}{n} + 1\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n} + 1\right),$
où on a effectué $\boxed{\text{le changement d'indice } j = k - n.}$ Comme f est continue sur $[1,2]$, d'après $\boxed{\text{le théorème sur les sommes de Riemann,}}$ cette suite converge vers $\int_1^2 f(t)\, dt$.
2. $\displaystyle v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{\frac{k^2}{n^2}}$, qui converge (d'après la question précédente) vers : $\boxed{\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx}$
3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx = \left[e^{-\frac{1}{x}} \right]_1^2 = \boxed{\frac{1}{e}(\sqrt{e} - 1)}$

Solution de l'exercice 8.91

1. $\lim(u_n) = \dfrac{1}{2}$.
2. $\lim(u_n) = \dfrac{1}{3}$.
3. $\lim(u_n) = \dfrac{1}{p+1}$.
5. $\lim(u_n) = \dfrac{1}{2}$.
10. $\lim(u_n) = 1 - \dfrac{2}{e}$.

Solution de l'exercice 8.94

La suite de terme général $\ln(y_n)$ s'exprime comme une somme de Riemann qui converge vers

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = 2\ln -1.$$

Donc $\lim(y_n) = e^{2\ln -1} = \dfrac{4}{e}$.

Solution de l'exercice 8.94

1. D'après le théorème sur les sommes de Riemann :

$$\lim(a_n) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \frac{\ln 2}{2}.$$

Par changement d'indice :

$$b_n = a_{n-1} + \frac{1}{2n}.$$

Donc (a_n) et b_n convergent vers la même limite $\dfrac{\ln 2}{2}$.

2. Comme $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$, d'après le théorème des gendarme (u_n) tend aussi vers $\dfrac{\ln 2}{2}$.

Solution de l'exercice 8.97

1. **Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$:**

Le changement de variable $u = \sqrt[3]{1+x}$ donne $x = u^3 - 1$ d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{du} &= 3u^2 \text{ soit } dx = 3u^2 du \\
\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}} &= \frac{(u^3-1)^2}{u} \\
\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx &= (u^2-1)3u\,du \\
x = 0 &\Leftrightarrow u = 1 \\
x = 1 &\Leftrightarrow u = \sqrt[3]{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx &= \int_1^{\sqrt[3]{2}} (u^2-1)3u\,du \\
&= \left[\frac{3}{8}u^8 - \frac{6}{5}u^5 + \frac{3}{2}u^2\right]_{u=1}^{u=\sqrt[3]{2}} \\
&= \frac{3}{8}2^{\frac{8}{3}} - \frac{6}{5}2^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}2^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{3}{8} - \frac{6}{5} + \frac{3}{2}\right) \\
&= \left(\frac{3}{8}\times 2^2 - \frac{6}{5}\times 2^2 + \frac{3}{2}\right)2^{\frac{2}{3}} - \frac{27}{40} \\
&= \boxed{\frac{3}{5}2^{\frac{2}{3}} - \frac{27}{40}}
\end{aligned}$$

2. **Existence de α :**
La question précédente suggère d' $\boxed{\text{utiliser le théorème sur les sommes de Riemann}}$: comme la fonction
$x \longmapsto \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}$ est continue sur $[0,1]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx = \frac{3}{5}2^{\frac{2}{3}} - \frac{27}{40}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt[3]{1+\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\frac{k^2}{\sqrt[3]{\frac{k+n}{n}}} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\sqrt[3]{k+n}} \\ &= \frac{1}{n^{3-\frac{1}{3}}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt[3]{k+n}} = \frac{1}{n^{\frac{8}{3}}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt[3]{k+n}}\end{aligned}$$

Cela prouve qu'il <u>existe</u> $\boxed{\alpha = \frac{8}{3}}$ tel que la suite (u_n) a une limite finie non nulle (à savoir $\frac{3}{5}2^{\frac{2}{3}} - \frac{27}{40}$).

3. **Unicité de α :**
Cette valeur de α est <u>unique</u> car, pour tout $\alpha > 0$ on a :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt[3]{k+n}} = \frac{1}{n^{\alpha-\frac{8}{3}}}\left(\frac{1}{n^{\frac{8}{3}}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt[3]{k+n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{3}{5}2^{\frac{2}{3}} - \frac{27}{40}}{n^{\alpha-\frac{8}{3}}}.$$

donc :

$$\boxed{\lim(u_n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < \frac{8}{3} \\ \frac{3}{5}2^{\frac{2}{3}} - \frac{27}{40} & \text{si } \alpha = \frac{8}{3} \\ 0 & \text{si } \alpha > \frac{8}{3}\end{cases}}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.101

Pour tout $t \in [0,1]$ on a : $1 \leqslant (1+t^2)^{\frac{1}{n}} \leqslant 2^{\frac{1}{n}}$.
Donc par croissance de l'intégrale on obtient :

$$1 \leqslant u_n \leqslant 2^{\frac{1}{n}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$, par le théorème des gendarmes on a :

$$\boxed{\lim(u_n) = 1.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.103

Pour les questions 1 à 5 voir le corrigé de l'exercice 6.92.

6. Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\sin t \in [0,1]$ donc :

$$\sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t.$$

Par croissance de l'intégrale sur $[0,1]$ on obtient $u_{n+1} \leqslant u_n$. Donc la suite décroît.

7. Comme la suite décroît on a :

$$1 \geqslant \frac{I_{n+1}}{I_n}.$$

Comme $I_{n+2} \leqslant I_{n+1}$ et $I_n > 0$ on déduit :

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \frac{I_{n+2}}{I_n}.$$

Enfin l'inégalité

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} \geqslant \frac{n+1}{n+2},$$

est en fait une égalité et découle directement de la question 2.

8. D'après le théorème des gendarmes et la question précédente on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1,$$

d'où l'équivalence.

9. D'après la question 4 on a :

$$(n+1)I_n I_{n+1} = I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Comme $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$ et $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ on en déduit que :

$$\frac{\pi}{2}(n+1)I_n I_{n+1} = nI_n^2,$$

d'où :

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.109

1. $\theta \ : \ t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$ est $\boxed{\text{continue}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Les fonction continues sont intégrable sur un segment, donc u et f sont définies.
   Par définition u est une primitive de θ et donc $u'(x) = \theta(x) = \dfrac{\cos x}{x}$.

2. $f(x) = \displaystyle\int_1^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt - \int_1^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt = u(3x) - u(x)$ (relation de Chasles)
   Ainsi :

$$\boxed{f'(x) = 3\frac{\cos 3x}{3x} - \frac{\cos x}{x} = \frac{\cos 3x - \cos x}{x}.}$$

3. Limite en 0.
   (a) Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 : $\exists c \in [0,t]$; $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2}\cos c$. Ainsi : $0 \leqslant 1 - \cos t \leqslant \frac{t^2}{2}$
   (b) Ainsi, $h(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{1-\cos t}{t}\, dt \leqslant \int_x^{3x} \frac{t^2}{2t}\, dt = \int_x^{3x} \frac{t}{2}\, dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_x^{3x} = \frac{8x^2}{4} = 2x^2$ Le majorant tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim_{x\to 0} h(x) = 0.}$
   (c) Or, $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{1}{t}\, dt = [\ln t]_x^{3x} = \ln 3.$
   Comme $h(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{1}{t}\, dt - f(x) = \ln 3 - f(x)$, on en déduit que f a une limite en 0 à savoir :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = \ln 3}$$

(d) Limite en $+\infty$.

Intégrons par parties en posant $w' = \cos t$, $v = \dfrac{1}{t}$; $w = \sin t$, $v' = -\dfrac{1}{t^2}$:

$f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt = \left[\frac{\sin t}{t}\right]_x^{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\, dt$

Le crochet tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$. De plus, $|\sin t| \leqslant 1$ donc :

$$\left|\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\, dt\right| \leqslant \int_x^{3x} \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x}$$

Le majorant tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$

Solution de l'exercice 8.111

1. $J_0 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t}\, dt = \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right] = \boxed{\frac{2}{3}}$.

2. $J_1 = \displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1-t}\, dt$. Posons $u = \sqrt{1-t}$ (changement de variable). Alors :

$$t = 1 - u^2 \text{ et } dt = -2udu.$$

$J_1 = -\displaystyle\int_1^0 (1-u^2)u\ 2u\ du \ = \ 2\int_0^1 (u^2 - u^4)\ du = 2(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) = \boxed{\frac{4}{15}}$.

3. Dans J_n, effectuons une intégration par parties en posant $\boxed{u(t) = t^n}$ et $\boxed{v'(t) = \sqrt{1-t}}$; alors $u'(t) = nt^{n-1}$ et $v(t) = -\dfrac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}$

$J_n = \left[-t^n\dfrac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \dfrac{2n}{3}\displaystyle\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{\frac{3}{2}}dt = \frac{2n}{3}\int_0^1 (t^{n-1}\sqrt{1-t} - t^n\sqrt{1-t})\ dt = \frac{2n}{3}(J_{n-1} - J_n)$.

Et donc $J_n = \dfrac{2n}{2n+3}J_{n-1}$. Pour $n = 1$ on retrouve $J_1 = \dfrac{2}{2+3}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{15}$

4. $\forall t \in [0,1], \sqrt{1-t} \leqslant 1$. Ainsi, par croissance de l'intégration :

$$0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 t^n\ dt = \frac{1}{n+1}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes la suite $\boxed{(J_n) \text{ converge vers } 0.}$

Solution de l'exercice 8.113

1. **Étude de f :**

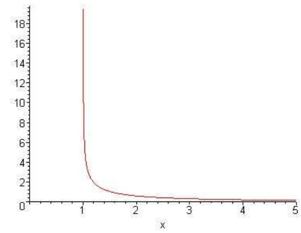
La fonction ln est croissante et positive pour $x > 1$, donc $x \longmapsto x(\ln x)^\alpha$ aussi, donc f est décroissante. On a :

$$\lim_{x\to1^+} (\ln x)^\alpha = 0^+ \text{ donc } \lim_{1^+} f = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} x(\ln x)^\alpha = +\infty \text{ donc } \lim_{+\infty} f = 0.$$

En particulier le graphe de f admet deux droites asymptotes d'équations $y = 0$ et $x = 1$. D'où, en résumé :

x	1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0



2. **Inégalité** $f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k)$ **:**

   La fonction $\boxed{f \text{ est décroissante,}}$ donc, sur l'intervalle $[k, k+1]$ on a : $f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$.
   $\boxed{\text{Par croissance de l'intégrale}}$ on déduit :

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dx \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \int_k^{k+1} f(k)$$

   Les intégrales situées à droite et à gauche de l'inégalité représentent des aires de rectangles et se calculent donc sans difficulté :

$$\int_k^{k+1} f(l) = ((k+1)-k))f(l) = f(l) \quad (l = k \text{ ou } k+1)$$

   D'où

$$\boxed{f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k).}$$

3. **Inégalité** $u_{n+1} - u_2 \leqslant \displaystyle\int_2^{n+1} f(x)\,dx \leqslant u_n.$ **:**

   $\boxed{\text{En sommant l'inégalité précédente pour } k=2 \text{ à } k=n}$ on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} f(k+1) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k) = u_n.$$

   $\boxed{\text{Le changement d'indice } j = k+1}$ dans la première somme donne :

$$\sum_{k=2}^{n} f(k+1) = \sum_{j=3}^{n+1} f(j) = \left(\sum_{j=2}^{n+1} f(j)\right) - f(2) = u_{n+1} - u_2.$$

   $\boxed{\text{La relation de Chasles}}$ pour les intégrales donne :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_2^{n+1} f(x)\,dx,$$

   d'où le résultat.

4. **Calcul de** $\displaystyle\int_2^{n+1} f(x)\,dx$ **:**

On reconnaît que $f = \frac{\ln'}{\ln^{\alpha}} = \ln' \ln^{-\alpha}$, donc f admet pour primitive :

$$F = \begin{cases} \frac{\ln^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln|\ln| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}.$$

On en déduit :

$$\boxed{\int_2^{n+1} f(x)\,dx = F(n+1) - F(2) = \begin{cases} \frac{(\ln n+1)^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(\ln n+1) - \ln(\ln 2) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}.}$$

5. **La suite (u_n) diverge si $\alpha \leqslant 1$:**
   D'après le calcul de $\boxed{\text{la question précédente}}$ et $\boxed{\text{les théorèmes de calcul sur les limites}}$ on a toute de suite, lorsque $\alpha \leqslant 1$:
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_2^{n+1} f(x)\,dx = +\infty.$$
   D'après $\boxed{\text{la question 3,}}$ on a : $\int_2^{n+1} f(x) \leqslant u_n$
   donc d'après le $\boxed{\text{théorème des gendarmes}}$ on a :
   $$\boxed{\lim(u_n) = +\infty.}$$

6. **La suite (u_n) converge si $\alpha > 1$:**
   Remarquons que, d'après la définition de (u_n) :
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(\ln n+1)^{\alpha}} > 0,$$
   donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$ D'après le calcul de $\boxed{\text{la question précédente}}$ et $\boxed{\text{les théorèmes de calcul sur les limites}}$ on a toute de suite, lorsque $\alpha > 1$:
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_2^{n+1} f(x)\,dx = -\frac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$
   Comme la suite $\left(\int_2^{n+1} f(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée ; notons M un majorant. D'après $\boxed{\text{la question 3,}}$ on a : $u_{n+1} - u_2 \leqslant \int_2^{n+1} f(x)$
   D'où :
   $$u_{n+1} \leqslant u_2 + \int_2^{n+1} f(x) \leqslant u_2 + M$$
   Ainsi la suite $\boxed{(u_n) \text{ est majorée.}}$
   En conclusion $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge car elle est croissante et majorée.}}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.121

1. **Prolongement par continuité de f en 0 :**
   Il est connu que :
   $$\lim_{u\to 0^+} u \ln u = 0.$$
   Pour $u = -x$, d'après le théorème de composition des limites, on déduit :
   $$\lim_{x\to 0^-} -x\ln(-x) = 0,$$

d'où :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.}$$

Par ailleurs il est clair que

$$\lim_{x\to 0^+} f = \frac{0^2-0-1}{0+1} = -1.$$

Ainsi f se prolonge par continuité en 0 à condition de prendre $\boxed{f(0) = -1.}$

2. **Régularité de f et dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$:**
Les expressions de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ obtenues par somme, produit, quotient et/ou composée de fonctions de classe C^∞ montrent clairement que f est C^∞. On calcule alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1)(2x-1)-(x^2-x-1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \text{ si } x>0. \\ f'(x) &= 2x\ln(-x) + x^2(-1)\frac{1}{-x} \\ &= x(2\ln(-x)+1) \text{ si } x<0. \end{aligned}$$

3. **Dérivabilité du prolongement de f en 0 :**
Par définition de la dérivabilité, le prolongement de f est dérivable en 0 si et seulement si le taux de variations $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ converge quand x tend vers 0. De plus cette convergence est équivalente à la convergence à droite et à gauche (*i.e.* quand x tend vers 0^+ et 0^-) avec égalité des deux limites.
Pour $x>0$, comme la fraction rationnelle $x \longmapsto \frac{x^2-x-1}{x+1}$ est définie en 0, le taux de variations tend vers la dérivée, on a donc :

$$\lim_{x\to 0^+} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{0^2+2\times 0}{(0+1)^2} = 0.$$

Pour $x<0$ on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\ln(-x),$$

qui tend vers 0 quand x tend vers 0.
En conclusion le prolongement f est effectivement dérivable 0 de dérivée

$$\boxed{f'(0) = 0.}$$

4. **Limites de f en $+\infty$ et $-\infty$:**
Au voisinage de $+\infty$ on a :

$$x^2-x-1 \sim x^2 \text{ et } x+1 \sim x, \text{ donc } \frac{x^2-x-1}{x+1} \sim x,$$

d'où

$$\boxed{\lim_{+\infty} f = +\infty.}$$

Et par ailleurs, d'après les théorèmes de calcul sur les limites, il est clair que :

$$\boxed{\lim_{-\infty} f = +\infty.}$$

5. **Asymptote au graphe de f :**
Au voisinage de $+\infty$ on a vu que $f(x) \sim x$, d'où $\frac{f(x)}{x} \sim 1$, d'où :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.}$$

Et de plus :

$$f(x) - x = \frac{(x^2 - x - 1) - x(x+1)}{x+1} = \frac{-2x-1}{x+1},$$

donc :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = -2.}$$

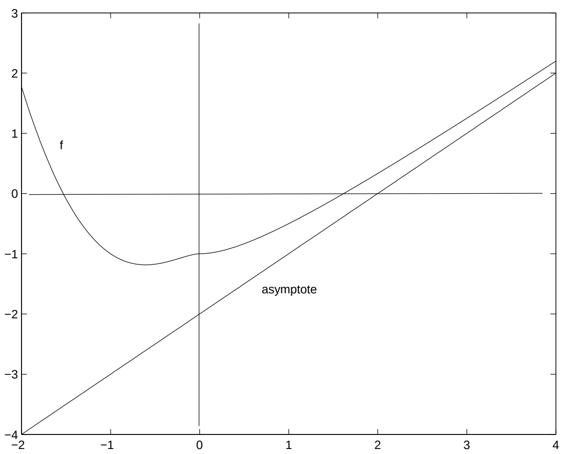
Ainsi le graphe de f admet pour asymptote $\boxed{\text{la droite d'équation } y = x - 2}$ lorsque $\boxed{x \text{ tend vers } +\infty.}$

6. **Variations de f sur $\mathbb{R}$:**
Elles sont données par le signe de la dérivée de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{e}}$		0		$+\infty$
$f'(x)$			$x(2\ln(-x)+1)$		$\vert$	$\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$	
signe		$-$	$\vert$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

7. **Tracé de f :**
Avec Matlab :

```
>>function y=ds8(x) ;
    if x==0, y=-1 ; else
        if x>0,
            y=(x.∧ 2-x-1)./(x+1) ;
            else y=-1+x.∧2.*log(-x) ;
        end ;
    end ;
>>x=-2 :0.01 :4
>>plot(x,ds8(x),x,x-2)
```



Solution de l'exercice 8.141

1. **Existence et unicité de u_n :**
Soit la fonction f, d'une variable réelle x, définie par : $f(x) = x^{k+1} + x^k$. Alors f est dérivable de dérivée :
$$f'(x) = (k+1)x^k + kx^{k-1}.$$
D'où :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, comme f est continue, d'après le théorème de la bijection continue, f est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi le point $n \in \mathbb{R}_+$ admet un unique antécédent $x_n \in \mathbb{R}_+$ par f, c'est-à-dire qu'il existe un unique x_n tel que : $x_n^{k+1} + x_n^k = n$.

2. **Monotonie de la suite (x_n) :**
Pour tout entier n, on a :
$$f(x_{n+1}) = n + 1 > n = f(x_n).$$
Comme $\boxed{f \text{ est strictement croissante}}$ sur $\mathbb{R}_+$, cela implique que :
$$x_{n+1} > x_n.$$
Ainsi $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est strictement croissante.}}$

3. **La suite (x_n) n'est pas bornée :**
Comme cette suite est positive, *i.e.* minorée par 0, le caractère non borné signifie qu'elle n'est pas majorée. Supposons, $\boxed{\text{par l'absurde}}$ que la suite (x_n) est majorée et notons M un majorant *i.e.* :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leqslant M.$$
Alors, comme f est croissante, la suite de terme général $n = f(x_n)$ est majorée par $f(M)$, ce qui est absurde.
Ainsi $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ n'est pas majorée.}}$

4. **Équivalence $x_n \sim n^{\frac{1}{k+1}}$:**
Comme la suite (x_n) est croissante (question 2) et non majorée (question 3), elle tend vers $+\infty$, d'après le théorème de la limite monotone. Ainsi la suite de terme général x_n^{k+1} est prépondérante sur la suite x_n^k, puisque leur quotient x_n tend vers l'infini. D'où :
$$n = x_n^{k+1} + x_n^k \sim x_n^{k+1}.$$
Comme l'équivalence se comporte bien pour les puissances d'exposant constant on en déduit que :
$$n^{\frac{1}{k+1}} \sim \left(x_n^{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}} = x_n.$$

Solution de l'exercice 8.142

1. **Solution de l'équation $f_n(x) = 0$:**
La fonction f_n est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$, vaut -1 en 0 et tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Donc, d'après $\boxed{\text{le théorème de la bijection continue,}}$ c'est une bijection sur $[-1, +\infty[$. Ainsi 0 a un unique antécédent x_0 par f_n.

2. **Relation $0 \leqslant x_0 \leqslant \frac{1}{2}$:**
   On a : $-1 = f_0(0) \leqslant \underbrace{f_n(x_n)}_{=0} \leqslant f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4}$.

   Comme f_n est $\boxed{\text{strictement croissante}}$ on en déduit le résultat annoncé.

3. **Monotonie de (x_n) :**
   Comme $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}$ on a $x_{n+1}^{n+1} < x_{n+1}^n$. Donc :

   $$f_n(x_{n+1}) = f_n(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_{n+1}) = (x_{n+1}^n - (x_{n+1}^{n+1} > 0 = f_n(x_n)$$

   Comme f_n est strictement croissante on déduit que $x_{n+1} > x_n$, donc la suite est $\boxed{\text{strictement croissante.}}$

4. **Convergence et limite de (x_n) :**
   La suite est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$ donc elle converge vers une limite ℓ. Comme :

   $$0 \leqslant (x_n)^n \leqslant \frac{1}{2^n},$$

   d'après le théorème des gendarmes, la suite de terme général $(x_n)^n$ tend vers 0. Donc par passage à la limite dans la relation : $(x_n)^n + x_n^2 + 2x_n - 1 = 0$ on a : $\ell^2 + 2\ell - 1 = 0$ d'où $\boxed{\ell = \sqrt{2} - 1}$ (car $\ell = -\sqrt{2} - 1$ n'est pas possible d'après $x_n \geqslant 0$).

Solution de l'exercice 8.143

1. **Tableau de variations de f_n et existence de u_n :**
   Il est clair que f_n est une fonction dérivable, et sa dérivée vaut :

   $$f_n'(x) = \frac{(x+n) - (x-n)}{(x+n)^2} + e^{-x} = \frac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x} > 0,$$

   par conséquent la fonction $\boxed{f_n \text{ est strictement croissante.}}$ Comme, au voisinage de $+\infty$ on a :

   $$x + n \sim x \text{ et } x - n \sim x \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} \frac{x-n}{x+n} = 1,$$

   d'où

   $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 1.}$$

   Et par ailleurs, il est évident que

   $$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-n}{n} - e^{-0} = -2.}$$

   On peut résumer ces informations dans le tableau suivant :

x	0		$+\infty$
$f_n(x)$	-2	$\nearrow$	1

   comme la fonction f_n est continue, $\boxed{\text{d'après le théorème de la bijection,}}$ on déduit que $\boxed{f_n \text{ est une bijection de } \mathbb{R}_+^* \text{ sur }]-2, 1[.}$ Par conséquent l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée u_n dans $\mathbb{R}_+^*$.

2. **Inégalité $u_n > n$:**
On a :

$$f_n(n) = -e^{-n} < 0 = f_n(u_n).$$

Comme f_n est strictement croissante, on en déduit : $n < u_n$.

3. **Inégalité $u_n \leqslant n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)$:**

De même, il faut et il suffit de montrer que $\boxed{f_n\left(n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)\right) \geqslant 0.}$ On a :

$$\begin{aligned} f_n\left(n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)\right) &= \frac{n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}-1\right)}{n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}+1\right)} - e^{-n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)} \\ &= \frac{\frac{(1+e^{-n})-(1-e^{-n})}{1-e^{-n}}}{\frac{(1+e^{-n})+(1-e^{-n})}{1-e^{-n}}} - e^{-n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)} \\ &= \frac{2e^{-n}}{2} - e^{-n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)} \\ &= e^{-n} - e^{-n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)} \end{aligned}$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < e^{-n} \leqslant e^{-1} < 1$
d'où : $e^{-n} > 0 > -e^{-n} > -1$,
d'où : $1 + e^{-n} > 1 - e^{-n} > 0$,
d'où : $\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} > 1$,
d'où : $-n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right) < -n$,
d'où : $e^{-n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)} < e^{-n}$,
d'où : $f_n\left(n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)\right) > 0$.

Remarque : l'inégalité intermédiaire $\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} > 1$ pour tout $n > 0$ s'obtient aussi directement en remarquant que la fonction $x \mapsto \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ d'après les théorèmes de calcul sur les fonctions monotones, et qu'elle vaut 1 en $x = 0$.

4. **Limites de (u_n) et $\left(\frac{u_n}{n}\right)$:**
D'après la question 2, on a, pour tout n :

$$n < u_n,$$

donc, comme $\lim(n) = +\infty$, d'après le théorème d'encadrement, on déduit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty u_n} = +\infty.}$$

D'après les deux question précédentes, on a, pour tout n

$$n \leqslant u_n \leqslant n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right),$$

soit

$$1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}.$$

Comme

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} = 1,}$$

d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1.}$$

Solution du problème 8.146

1. (a) **Solution de $x = \sqrt{x} + a$:**
Cette équation n'est définie que pour $x \geqslant 0$; elle s'écrit aussi sous la forme du système suivant :

$$\begin{cases} X^2 = X + a \\ X = \sqrt{x} \end{cases}$$

Le discriminant de l'équation du second degré $X^2 - X - a = 0$ est :

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-a) = 1 + 4a > 0$$

Il y a donc deux racines

$$X_1 = \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}.$$

Comme a est strictement positif, on voit que $\sqrt{1+4a} > 1$, donc $X_1 < 0$ et $X_2 > 0$. Le système a donc une unique solution

$$\boxed{\ell(a) = X_2^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}\right)^2.}$$

On calcule en particulier :

$$\boxed{\ell(1) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.}$$

$\boxed{\text{Les composées de fonctions croissantes sont croissantes.}}$ La fonction $a \longmapsto 1 + 4a$ est croissante ; il en est donc de même de $a \longmapsto \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ qui, de plus, est positive. On déduit donc que $\boxed{a \longmapsto \ell(a) \text{ est croissante.}}$ On déduit donc que $\boxed{\ell(a) \leqslant \ell(1) \text{ si } a \leqslant 1, \text{ et } \ell(a) \geqslant \ell(1) \text{ si } a \geqslant 1.}$

(b) **Variations de f_a :**
La fonction f_a est la composée de la fonction polynomiale $X \longmapsto X^2 - X - a$, qui est décroissante pour $X \leqslant \frac{1}{2}$ et croissante pour $X \geqslant \frac{1}{2}$, et de la fonction racine carrée qui est croissante. On a donc le tableau de variations et de signe suivant :

X	0		$\frac{1}{2}$		$\ell(a)^2$		$+\infty$
$x = X^2$	0		$\frac{1}{4}$		$\ell(a)$		$+\infty$
f_a	$-a$	$\searrow$	$-\frac{1}{4} - a$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	
signe de f_a			$-$		0	$+$	

2. **Inégalité $u_2 > 1$:**
D'après la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n}$, appliquée avec $n = 1$ on a :

$$\boxed{u_2 = \sqrt{u_1} + 1.}$$

Comme u_1 est supposé strictement positif on en déduit bien que $u_2 > 1$.

Si $u_n > 1$ alors $u_{n+1} > 1$:
On utilise la relation

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n}.$$

Comme $u_n > 1$, on a $\sqrt{u_n} > 1$, d'où $u_{n+1} > 1$, puisque $\frac{1}{n} > 0$.

La suite (u_n) est minorée par 1 :
Les deux remarques précédentes montrent immédiatement que la propriété "$u_n > 1$" est vraie, $\boxed{\text{par récurrence}}$ sur $n \geqslant 1$, ce qui prouve que (u_n) est minorée (strictement) par 1.

3. **La seule limite possible de (u_n) est 1 :**
En effet si (u_n) converge, notons l sa limite. Comme la fonction racine carrée en continue en l, et d'après le théorème de composition des limites, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{l}.$$

Comme la suite de terme générale $\frac{1}{n}$ converge vers 0 on en déduit que la suite de terme général $\sqrt{u_n} + \frac{1}{n}$ converge vers $\sqrt{l}$. Par ailleurs cette suite est la suite de terme général u_{n+1} ; elle converge donc vers l, comme (u_n). On obtient donc l'égalité

$$\boxed{\sqrt{l} = l.}$$

Les seules solutions sont $l = 0$ et $l = 1$; comme par ailleurs la suite (u_n) est minorée par 1, il n'est pas possible qu'elle tende vers 0, donc $\boxed{\text{la seule limite possible de } (u_n) \text{ est } 1.}$

4. **Cas où l'hypothèse (H) est vérifiée :**

(a) **Inégalité $u_n \leqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}$:**
On a vu que la fonction $a \longmapsto \ell(a)$ est croissante. Comme $\frac{1}{n} \leqslant 1$ on déduit :

$$\ell\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \ell(1) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Si l'hypothèse (H) est vérifiée on déduit donc :

$$\boxed{u_n \leqslant \ell\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}.}$$

(b) **Croissance de (u_n) :**
On a :

$$u_{n+1} - u_n = -u_n + \sqrt{u_n} + \frac{1}{n} = -f_{\frac{1}{n}}(u_n).$$

D'après le tableau de variations de $f_{\frac{1}{n}}$ obtenu à la question 1-b — avec $a = \frac{1}{n}$ — on voit que cette fonction est négative sur $\left[0, \ell\left(\frac{1}{n}\right)\right]$; ainsi, comme $u_n \leqslant \ell\left(\frac{1}{n}\right)$, d'après l'hypothèse (H), on déduit que $f_{\frac{1}{n}}(u_n) \leqslant 0$. Ainsi $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, pour tout entier $n \geqslant 1$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

(c) **Contradiction :**
Comme la suite (u_n) est croissante (question 4-b) et majorée (question 4-a), elle converge vers une limite l ; par ailleurs comme elle croît, on a, pour tout n :

$$u_n \geqslant u_1 > 1,$$

d'où $l \geqslant u_n > 1$. Or ceci contredit le résultat de la question 3.

5. **Il existe m tel que $u_m > \ell\left(\frac{1}{m}\right)$:**

   (a) **Inégalité $u_{m+1} < u_m$:**
   On utilise la même méthode qu'à la question 4-b. On a :
   $$u_{m+1} - u_m = -f_{\frac{1}{m}}(u_m) < 0,$$
   car $u_m > \ell\left(\frac{1}{m}\right)$, d'après le tableau de variations de $f_{\frac{1}{m}}$.

   (b) **$u_{n+1} < u_n$ entraîne $u_{n+2} < u_{n+1}$:**
   Si $u_{n+1} < u_n$, alors $\sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{u_n}$.
   Comme par ailleurs : $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$,
   on déduit :
   $$\boxed{u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \frac{1}{n+1} < \sqrt{u_n} + \frac{1}{n} = u_{n+1}.}$$

   (c) **Convergence de (u_n) vers 1 :**
   Comme la suite (u_n) est décroissante à partir du rang m, d'après la question 5-b, et minorée par 1, d'après la question 2, elle converge. Alors, d'après la question 3, sa limite ne peut être que 1.

SOLUTION DU PROBLÈME 8.148

1. **Croissance de P_n :**
   Les puissances $x \longmapsto x^k$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$, il en est donc de même pour $x \longmapsto kx^k$. Une somme de fonctions strictement croissantes est strictement strictement croissante, donc :
   $\boxed{P_n \text{ est strictement croissante.}}$

2. **Existence et unicité de x tel que $P_n(x) = 1$:**
   Toute fonction strictement strictement croissante est injective, donc l'équation $P_n(x) = 1$ a *au plus* une solution. L'existence d'*au moins* une solution découle du $\boxed{\text{théorème des valeurs intermédiaires,}}$ sachant que P_n est continu, que $P_n(0) = 0$ et $P_n(1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} > 1$.

3. **Monotonie de (u_n) :**
   Par définition de u_n, on a :
   $$1 = P_n(u_n) = \sum_{k=1}^{n} k(u_n)^k.$$
   Ainsi
   $$P_{n+1}(u_n) = \sum_{k=1}^{n+1} k(u_n)^k = (n+1)(u_n)^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} k(u_n)^k = (n+1)(u_n)^{n+1} + 1 \geqslant 1 = P_{n+1}(u_{n+1}).$$
   Comme P_{n+1} est une fonction strictement croissante, cela entraîne que $u_n \geqslant u_{n+1}$ *i.e.* :
   $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$.

4. **Convergence de (u_n) :**
   La suite (u_n) est $\boxed{\text{décroissante et minorée}}$ par 0 (puisque $u_n \in \mathbb{R}_+$ par définition), donc elle converge.

5. **majoration de u_n et ℓ :**
   On a :
   $$P_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ si } n \geqslant 2.$$
   Donc $P_n\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 1$; comme $P_n(u_n) = 1$ et que P_n est une fonction strictement croissante, on déduit que nécessairement $\boxed{u_n \leqslant \frac{1}{2}.}$

   De $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$, par passage à la limite, on déduit immédiatement $\boxed{0 \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{2}.}$
   Autre méthode : $u_2 = \frac{1}{2}$ (en tant que solution positive de l'équation du second degré $P_2(u_2) = u_2 + 2(u_2)^2 = 1$) et (u_n) décroît.

6. **Calcul de $(x-1)^2 \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$:**

   On a :
   $$\begin{aligned}
   (x-1)^2 \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} &= (x^2-2x+1)\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \\
   &= \sum_{k=1}^{n} kx^{k+1} - 2\sum_{k=1}^{n} kx^k + \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \\
   &= \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)x^k - 2\sum_{k=1}^{n} kx^k + \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k \quad \text{(changements d'indices)} \\
   &= \underbrace{\left(\sum_{k=2}^{n-1}\left((k-1)-2k+(k+1)\right)x^k\right)}_{=0 \text{ (télescopage)}} + ((n-1)x^n + nx^{n+1}) - 2(x+nx^n) + (1+2x) \\
   &= nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1
   \end{aligned}$$

   Remarque : une démonstration par récurrence est également possible.

7. (a) **Relation $3u_n - 1 - u_n^2 = (u_n)^{n+1}(n+1-nu_n)$:**
   On a :
   $$\begin{aligned}
   (u_n-1)^2 &= (u_n-1)^2 \sum_{k=1}^{n} k(u_n)^k \quad \text{car } P_n(u_n) = 1 \\
   &= u_n(u_n-1)^2\left(\sum_{k=1}^{n} k(u_n)^{k-1}\right) \\
   &= u_n\left(n(u_n)^{n+1} - (n+1)(u_n)^n + 1\right) \quad \text{d'après la question précédente}
   \end{aligned}$$

   Ainsi
   $$\begin{aligned}
   3u_n - 1 - u_n^2 &= u_n - (u_n-1)^2 \\
   &= u_n - u_n\left(n(u_n)^{n+1} - (n+1)(u_n)^n + 1\right) \\
   &= u_n - \left(n(u_n)^{n+2} - (n+1)(u_n)^{n+1} + u_n\right) \\
   &= -n(u_n)^{n+2} - (n+1)(u_n)^{n+1} \\
   &= (u_n)^{n+1}(-nu_n + n + 1).
   \end{aligned}$$

(b) **Relation** $3u_n - 1 - u_n^2 > 0$ **:**
On sait que $u_n \leqslant 1$ pour $n \geqslant 1$, puisque $u_n \leqslant \frac{1}{2}$ si $n \geqslant 2$, et $u_1 = 1$, d'après $P_1 = x$. Ainsi :

$$n + 1 - nu_n \geqslant (n+1) - n \times 1 = 1 > 0.$$

Donc d'après la relation précédente, comme $(u_n)^{n+1} > 0$, on obtient $3u_n - 1 - u_n^2 > 0$.

(c) **Relation** $\ln u_n = \frac{\ln(3u_n - 1 - u_n^2)}{n+1} - \frac{\ln(n+1-nu_n)}{n+1}$ **:**
Tous les facteurs de la relation $3u_n - 1 - u_n^2 = (u_n)^{n+1}(n + 1 - nu_n)$ sont positifs, on peut donc prendre le logarithme :

$$\ln(3u_n - 1 - u_n^2) = \ln((u_n)^{n+1}) + \ln(n + 1 - nu_n),$$

soit

$$(n+1)\ln(u_n) = \ln(3u_n - 1 - u_n^2) - \ln(n + 1 - nu_n),$$

soit

$$\ln u_n = \frac{\ln(3u_n - 1 - u_n^2)}{n+1} - \frac{\ln(n+1-nu_n)}{n+1}.$$

8. **Relation** $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqslant \ell \leqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ **:**
Le trinôme du second degré $3x - 1 - x^2$ admet pour racines $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Ainsi l'inéquation $3u_n - 1 - u_n^2 > 0$ entraîne $u_n \in \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$, en particulier $u_n > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. En passant à la limite on obtient ainsi $\boxed{\ell \geqslant \frac{3-\sqrt{5}}{2}.}$

9. **Cas où** $\ell \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$**. :**
Alors $(3u_n - 1 - u_n^2)$ converge vers $3\ell - 1 - \ell^2$ qui est non nul et strictement positif donc $\left(\ln(3u_n - 1 - u_n^2)\right)$ converge, donc :

$$\lim \frac{\ln(3u_n - 1 - u_n^2)}{n+1} = 0.$$

De plus, on sait que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, donc

$$1 \leqslant n + 1 - nu_n \leqslant n + 1,$$

donc

$$0 \leqslant \frac{\ln(n+1-nu_n)}{n+1} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1-nu_n)}{n+1} = 0.$$

Ainsi d'après la question (7c) $\ln(u_n)$ converge vers 0, donc u_n tend vers 1, ce qui est absurde puisque $u_n \leqslant \frac{1}{2}$ pour $n \geqslant 2$. Ainsi il est absurde que $\ell \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ donc $\boxed{l\ell = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.}$

SOLUTION DU PROBLÈME 8.149

1. ***f* est strictement monotone :**
Les fonctions $t \longmapsto t^p$ et $t \longmapsto t$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$. Comme f est une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs de ces deux fonctions, elle est elle-même strictement croissante. Une autre méthode possible consiste à calculer la dérivée de f et à vérifier qu'elle est strictement positive.

Limite de f en $+\infty$:
On sait que

$$\lim_{t\to+\infty} t^p = +\infty \text{ et } \lim_{t\to+\infty} t = +\infty.$$

D'après $\boxed{\text{les théorèmes usuels de calcul sur les limites}}$ on déduit immédiatement que :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} t^p + pt = +\infty.}$$

f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$:
Comme
- f est une fonction dérivable,
- f est strictement croissante,
- $f(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$,

d'après le $\boxed{\text{théorème de la bijection}}$, f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. **Sens de variation de f^{-1} :**
Comme f est $\boxed{\text{strictement croissante,}}$ on sait qu'il en est de même de f^{-1}.
Montrons que $\boxed{f^{-1} \text{ n'est pas majorée, par l'absurde :}}$ si f^{-1} était majorée par un nombre $M \in \mathbb{R}$ on aurait :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f^{-1}(x) \leqslant M.$$

Comme f est croissante, on en déduirait $f(f^{-1}(x)) \leqslant f(M)$, soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \leqslant f(M),$$

soit encore $\boxed{\mathbb{R}_+ \subset]-\infty, f(M)], \text{ ce qui est absurde.}}$
Ainsi comme f^{-1} est une fonction croissante et non majorée, on sait qu'alors :

$$\boxed{\lim_{+\infty} f^{-1} = +\infty.}$$

3. **Calcul de $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^p}$:**
On a :

$$\frac{f(t)}{t^p} = 1 + p\frac{1}{t^{p-1}}.$$

Comme $p \geqslant 2$ on a $p - 1 \geqslant 1$, donc :

$$\lim_{t\to+\infty} t^{p-1} = +\infty,$$

d'où

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{p-1}} = 0,$$

d'où

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^p} = 1.}$$

Remarquons que $x \longmapsto \frac{\sqrt[p]{x}}{f^{-1}(x)}$ est la composée des trois fonctions $y \longmapsto \sqrt[p]{y}$, $t \longmapsto \frac{f(t)}{t^p}$ et f^{-1} puisque :

$$\frac{\sqrt[p]{x}}{f^{-1}(x)} = \sqrt[p]{\frac{f(f^{-1}(x))}{(f^{-1}(x))^p}}.$$

On sait déjà que $\lim\limits_{y\to 1} \sqrt[p]{y} = 1$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(t)}{t^p} = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} f^{-1} = +\infty$; d'après le théorème de composition des limites on déduit donc que

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt[p]{x}}{f^{-1}(x)} = 1.}$$

4. **Signe de $\varphi(t) - t$:**
Comme
$$f'(t) = p(t^{p-1} + 1),$$
on déduit immédiatement que $\varphi(t) - t = \frac{a-f(t)}{f'(t)}$.
Comme f est strictement croissante on déduit que f' est strictement positive ; ainsi le signe de $\varphi(t) - t$ est le même que celui de $a - f(t)$. Par ailleurs remarquons que pour $t = f^{-1}(a)$ on a
$$a - f(t) = a - f(f^{-1}(a)) = a - a = 0.$$
En particulier $\varphi(t) - t = 0$ pour $t = f^{-1}(a)$, c'est-à-dire $\boxed{\varphi\left(f^{-1}(a)\right) = f^{-1}(a).}$ De plus f est strictement croissante, donc $t \longmapsto a - f(t)$ est décroissante strictement ; on a donc le tableau de variation suivant :

t	0		$f^{-1}(a)$		$+\infty$
$a - f(t)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

En particulier on voit que $a - f(t)$ est positif pour $t \leqslant f^{-1}(a)$ et négatif pour $t \geqslant f^{-1}(a)$.

5. **Calcul de φ' et variations de φ :**
Rappelons la formule de dérivation d'un quotient de deux fonctions dérivables u et v :
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{u^2}.$$
Pour φ on obtient ainsi :
$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{p(p-1)t^{p-1} \times p(t^{p-1}+1) - ((p-1)t^p + a) \times p(p-1)t^{p-2}}{(p(t^{p-1}+1))^2} \\
&= p(p-1)\frac{pt^{2p-2} + pt^{p-1} - (p-1)t^{2p-2} - at^{p-2}}{(p(t^{p-1}+1))^2} \\
&= \frac{p(p-1)t^{p-2}}{(p(t^{p-1}+1))^2}(t^p + pt - a),
\end{aligned}$$
c'est-à-dire : $\boxed{\varphi'(t) = \dfrac{p(p-1)t^{p-2}}{(p(t^{p-1}+1))^2}(t^p + pt - a).}$ En particulier voit que $\varphi'(t)$ est du signe de $t^p + pt - a = f(t) - a$; d'après l'étude de signe faite à la question précédente on déduit le signe de φ' puis les variations de φ :

t	0		$f^{-1}(a)$		$+\infty$
$f(t) - a$		$-$	0	$+$	
$\varphi(t)$	$\frac{a}{p}$	$\searrow$	$f^{-1}(a)$	$\nearrow$	

6. **Existence et unicité de (u_n) :**
Pour tout $t > 0$, en divisant le numérateur et le dénominateur de φ par t^{p-1} on a :
$$\varphi(t) = \frac{(p-1)t + \frac{a}{t^{p-1}}}{p\left(1 + \frac{1}{t^{p-1}}\right)}.$$
Comme
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{a}{t^{p-1}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{p-1}} = 0,$$
on déduit que $\boxed{\lim_{+\infty} \varphi = +\infty.}$ Ainsi, d'après le tableau de variations de φ et le théorème de la bijection $\varphi(\mathbb{R}_+) = [f^{-1}(a), \frac{a}{p}] \cup]f^{-1}(a), +\infty[$, soit $\boxed{\varphi(\mathbb{R}_+) = [f^{-1}(a), +\infty[.}$
Comme f^{-1} est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a en particulier $f^{-1}(a) \geqslant 0$ d'où $\boxed{\varphi(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+.}$ Ainsi la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ $\boxed{\text{est bien définie}}$; si u_0 est donné cette suite est alors $\boxed{\text{unique.}}$

7. **(u_n) décroît et prend ses valeurs dans $\left[f^{-1}(a), \frac{a}{p}\right]$:**
On voit immédiatement que $\boxed{f^{-1}(a) < \frac{a}{p}}$ puisque, d'après la question 5, φ décroît strictement sur $[0, f^{-1}(a)]$ avec $\varphi(0) = \frac{a}{p}$ et $\varphi(f^{-1}(a)) = f^{-1}(a)$. En particulier on a montré que $u_0 = \frac{a}{p} > f^{-1}(a)$ *i.e.* $\boxed{u_0 \in [f^{-1}(a), \frac{a}{p}].}$
Par ailleurs, d'après la question 5, φ est croissante sur l'intervalle $[f^{-1}(a), \frac{a}{p}]$; comme $\varphi(f^{-1}(a)) = f^{-1}(a)$ on déduit $\boxed{\varphi([f^{-1}(a), \frac{a}{p}]) = [f^{-1}(a), \varphi(\frac{a}{p})].}$
Par ailleurs, d'après la question 4, on sait $\varphi(t) - t < 0$ pour $t > f^{-1}(a)$; par exemple pour $t = \frac{a}{p}$, on obtient $\varphi(\frac{a}{p}) < \frac{a}{p}$, d'où $\boxed{\varphi([f^{-1}(a), \frac{a}{p}]) \subset [f^{-1}(a), \frac{a}{p}].}$
Par conséquent, comme $u_0 \in [f^{-1}(a), \frac{a}{p}]$ et $\varphi([f^{-1}(a), \frac{a}{p}]) \subset [f^{-1}(a), \frac{a}{p}]$, on déduit immédiatement, par récurrence sur n, que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est à valeurs dans } [f^{-1}(a), \tfrac{a}{p}].}$ D'après la question 4, on a donc, pour tout entier n, $\boxed{\varphi(u_n) - u_n < 0,}$ puisque $u_n \in [f^{-1}(a), \frac{a}{p}]$, ce qui signifie que $u_{n+1} < u_n$, c'est à dire que la suite $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

8. **Majoration de $|\varphi'(t)|$:**
Pour $t \in [f^{-1}(a), \frac{a}{p}]$ d'après la question 4, on a $f(t) - a \geqslant 0$ *i.e.* $0 \leqslant t^p + pt - a$; de plus comme $t \leqslant \frac{a}{p}$, on a $pt \leqslant a$ *i.e.* $pt - a \leqslant 0$, d'où $t^p + pt - a \leqslant t^p$. On a ainsi montré que pour tout $t \in [f^{-1}(a), \frac{a}{p}]$ on a :
$$\boxed{0 \leqslant t^p + pt - a \leqslant t^p.}$$
Comme $\frac{p(p-1)t^{p-2}}{p^2(t^{p-1}+1)^2}$ est positif on déduit que :
$$0 \leqslant \frac{p(p-1)t^{p-2}}{p^2(t^{p-1}+1)^2}(t^p + pt - a) \leqslant \frac{p(p-1)t^{p-2}}{p^2(t^{p-1}+1)^2} t^p = \frac{p-1}{p} \frac{(t^{p-1})^2}{(t^{p-1}+1)^2},$$
c'est-à-dire
$$0 \leqslant \varphi'(t) \leqslant \frac{p-1}{p} \frac{X^2}{(X+1)^2},$$
avec $X = t^{p-1} \geqslant 0$. Or, pour $X \geqslant 0$, on a
$$(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1 > X^2,$$

d'où $\frac{X^2}{(X+1)^2} \leqslant 1$. Ainsi il vient

$$\boxed{0 \leqslant \varphi'(t) \leqslant \frac{p-1}{p}.}$$

Comme $\varphi'(t)$ est positif on a $|\varphi'(t)| = \varphi'(t)$ d'où $\boxed{|\varphi'(t)| \leqslant \frac{p-1}{p}.}$

9. **Relation entre $|u_{n+1} - f^{-1}(a)|$ et $|u_n - f^{-1}(a)|$:**
D'après la question 8, $\frac{p-1}{p}$ est un majorant de $|\varphi'(t)|$ pour tout $t \in [f^{-1}(a), \frac{a}{p}]$; comme la borne supérieure est le plus petit des majorants on déduit que :

$$\sup_{t \in \left[f^{-1}(a), \frac{a}{p}\right]} |\varphi'(t)| \leqslant \frac{p-1}{p}.$$

appliquons alors l'inégalité des accroissements finis avec $u = u_n$ et $v = f^{-1}(a)$; comme $\varphi(u_n) = u_{n+1}$ et $\varphi(f^{-1}(a)) = f^{-1}(a)$, on trouve :

$$\boxed{\left|u_{n+1} - f^{-1}(a)\right| \leqslant \left|u_n - f^{-1}(a)\right| \sup_{t \in \left[f^{-1}(a), \frac{a}{p}\right]} |\varphi'(t)| \leqslant \frac{p-1}{p} \left|u_n - f^{-1}(a)\right|.}$$

10. **Convergence et limite de (u_n) :**
Montrons $\boxed{\text{par récurrence sur } n \geqslant 0}$ la relation $\mathcal{R}(n)$ suivante :

$$\left|u_n - f^{-1}(a)\right| \leqslant \left(\frac{p-1}{p}\right)^n \left|u_0 - f^{-1}(a)\right|.$$

– $\mathcal{R}(0)$ signifie

$$\left|u_0 - f^{-1}(a)\right| \leqslant \left|u_0 - f^{-1}(a)\right| \ ;$$

elle est donc vraie, évidemment.

– Si $\mathcal{R}(n)$ est vraie, alors, d'après la question précédente :

$$\left|u_{n+1} - f^{-1}(a)\right| \leqslant \frac{p-1}{p} \left|u_n - f^{-1}(a)\right| \leqslant \frac{p-1}{p} \left(\frac{p-1}{p}\right)^n \left|u_0 - f^{-1}(a)\right| = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{n+1} \left|u_0 - f^{-1}(a)\right|,$$

donc $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie.

On remarque alors que $p - 1 \leqslant p$, donc $\frac{p-1}{p} < 1$, donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{p-1}{p}\right)^n = 0.}$$

Comme $\left|u_0 - f^{-1}(a)\right|$ est une constante, on déduit que dans l'inégalité $\mathcal{R}(n)$, le majorant tend vers 0, donc, d'après le $\boxed{\text{théorème d'encadrement :}}$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = f^{-1}(a).}$$

11. **Application au cas $p = 2$ et $a = 3$:**

(a) **Calcul de $f^{-1}(a)$:**
On a alors $f(t) = t^2 + 2t$. De plus on sait que

$$f(t) = a \Leftrightarrow t = f^{-1}(a).$$

La première équation s'écrit

$$t^2 + 2t = a = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3.$$

On trouve deux racines réelles $t = 1$ et $t = -3$; comme il faut que $t \in \mathbb{R}_+$ on a finalement $\boxed{f^{-1}(a) = 1.}$

(b) **Calcul de $u_0, u_1, \ldots, u_3$ etc. :**
On a $\varphi(t) = \frac{t^2+3}{2(t+1)}$; on calcule alors :

n	0	1	2	3
u_n	$\frac{3}{2}$	$\frac{21}{20}$	$\frac{1641}{1640}$	$\frac{10761681}{10761680}$
$\left(\frac{p-1}{p}\right)^n \left\|u_0 - f^{-1}(a)\right\|$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

(c) **Conclusion :**
On voit que les valeurs numériques de u_n se reprochent effectivement de 1, très rapidement.

SOLUTION DU PROBLÈME 8.153

1. **Développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de 0 :**
On connaît le développement limité de $\ln(1+u)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \ln(1+u) &= u - \frac{u^2}{2} + \mathrm{o}\left(u^2\right) \\ \text{d'où } \ln(1+2x) &= 2x - 2x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right) \\ \text{d'où } \frac{\ln(1+2x)}{x} - 1 &= 1 - 2x + \mathrm{o}\left(x\right) \end{aligned}$$

Ainsi f admet le développement limité $\boxed{f(x) = 1 - 2x + \mathrm{o}\left(x\right).}$

2. **Dérivabilité et dérivée en 0 :**
D'après la première question, f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 du type :

$$f(x) = f(0) - 2x + \mathrm{o}\left(x\right).$$

Ainsi f est dérivable en 0 de dérivée $\boxed{f'(0) = -2.}$

3. **Dérivabilité et dérivée sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$:**
Pour $x = 0$, on a montré la dérivabilité et calculé la dérivée à la question précédente. Pour $x \neq 0$, les théorèmes généraux sur les composée, quotient et différence de fonctions dérivables indiquent que f est dérivable de dérivée :

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2x+1} - \ln(1+2x)}{x^2}.$$

D'où $\boxed{f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x = 0 \\ \frac{2x-(1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.}$

Décroissance stricte de f :
Pour étudier le signe de f', on introduit la fonction h définie par :

$$h(x) = 2x - (1+2x)\ln(1+2x).$$

Elle est dérivable et on trouve

$$h'(x) = -2\ln(1+2x).$$

Le tableaux de variations de h est donc :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$-\infty$
h'		$+$	0	$-$	
h	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

On a donc $h(x) < 0$ (sauf en $x = 0$). On en déduit que $f'(x)$ est strictement négative si $x \neq 0$, et cela reste vrai en $x = 0$. Donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante.}}$

4. **Tableau de variations de f. :**

   On sait que la limite quand u tend vers $+\infty$ de $\frac{\ln(u)}{u}$ est 0. Donc pour $u = 2x+1$, l'expression $\frac{\ln(2x+1)}{2x+1}$ tend vers 0, donc en multipliant par $\frac{2x+1}{x}$ (qui tend vers 2 quand x tend vers $+\infty$) on trouve :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+1)}{x} - 1 = -1.$$

   Quand x tend vers $-\frac{1}{2}$ à droite, par contre, on a

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} \ln(2x+1) = -\infty, \quad \text{d'où} \quad \lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{\ln(2x+1)}{x} - 1 = +\infty.$$

   On peut ainsi compléter le tableau de variations de f :

x	$-\frac{1}{2}$		0		α		$-\infty$
f'		$-$	-2		$-$		
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

5. **Primitives de f :**

   La fonction f admet des primitives sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ car elle est continue sur cet intervalle.

6. **Équivalent de F en 0 :**

   On sait que, au voisinage de 0 :

$$f(x) = 1 + \mathrm{o}(1).$$

   Comme $F(0) = 0$ et $F' = f$, on en déduit un développement limité de F :

$$F(x) = F(0) + x + \mathrm{o}(x) = x + \mathrm{o}(x) \sim x.$$

   Ainsi $\boxed{F(x) \sim x.}$

7. (a) **Inégalités :**

   On étudie la fonction

$$h(t) = \ln(1+2t) + \frac{1}{\sqrt{1+2t}}.$$

   Elle est définie et dérivable sur $]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}[$, de dérivée :

$$h'(t) = \frac{2}{2t+1}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2t+1}}\right).$$

   La dérivée $h'(t)$ s'annule et change de signe pour $t = -\frac{3}{8}$. On a donc le tableau de variations :

t	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{3}{8}$		$-\frac{1}{4}$
h'		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	$2(1-\ln(2))$	$\nearrow$	

Comme la valeur minimale de $h(t)$ est $2(1-\ln(2)) > 0$, on déduit que $h(t) > 0$ pour $t \in]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}[$ *i.e.* $\boxed{\ln(1+2t) > -\frac{1}{\sqrt{1+2t}} \text{ si } t \in]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}[.}$

On en déduit ainsi :

$$0 \leqslant -\ln(1+2t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+2t}}.$$

De plus, sur le même intervalle, on a :

$$0 \leqslant -\frac{1}{t} \leqslant 4.$$

En multipliant ces deux inégalités on obtient :

$$0 \leqslant \frac{\ln(1+2t)}{t} \leqslant \frac{4}{\sqrt{1+2t}},$$

d'où $\boxed{f(t) \leqslant \frac{4}{\sqrt{1+2t}} - 1.}$

(b) **Primitive G :**

Comme

$$-\frac{4}{\sqrt{1+2x}} + 1 = -4(1+2x)^{-\frac{1}{2}} + 1,$$

on a immédiatement une primitive

$$G(x) = -2\frac{(1+2x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + x,$$

soit $\boxed{G(x) = -4\sqrt{1+2x} + x.}$

(c) **Minoration de $F(x)$:**

De la deuxième inégalité du (a), pour $x \leqslant -\frac{1}{4}$, on déduit :

$$\begin{array}{rcl} \int_{-\frac{1}{4}}^{x} f(t)\,dt & \geqslant & \int_{-\frac{1}{4}}^{x} \frac{4}{\sqrt{1+2t}} - 1\,dt \\ & = & G\left(-\frac{1}{4}\right) - G(x) \\ \text{d'où } F(x) & \geqslant & F\left(-\frac{1}{4}\right) + G\left(-\frac{1}{4}\right) - G(x) \\ & = & F\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-2\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right) - \left(-4\sqrt{1+2x} + x\right) \\ & \geqslant & F\left(-\frac{1}{4}\right) - 2\sqrt{2}, \end{array}$$

car $4\sqrt{1+2x} \geqslant 0$ et $-\frac{1}{4} - x \geqslant 0$ si $x \leqslant -\frac{1}{4}$.

(d) **Convergence de F en $-\frac{1}{2}$:**

Sur le voisinage $]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}[$ de $-\frac{1}{2}$, la fonction $\boxed{F \text{ est croissante et minorée,}}$ par la constante $F\left(-\frac{1}{4}\right) - 2\sqrt{2}$, donc elle converge en $-\frac{1}{2}$ à droite, vers une limite finie L.

8. **Majoration de F :**

La fonction f décroît et $f(\beta) \leqslant -\frac{1}{2}$, donc

$$f(t) \leqslant -\frac{1}{2} \text{ si } t \geqslant \beta.$$

On déduit l'inégalité
$$\int_\beta^x f(t)dt \leqslant \int_\beta^x -\frac{1}{2}dt,$$
soit
$$F(x) - F(\beta) \leqslant -\frac{1}{2}(x-\beta),$$
d'où le résultat $\boxed{F(x) \leqslant F(\beta) - \frac{1}{2}(x-\beta).}$

Comme $F(\beta) - \frac{1}{2}(x-\beta)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on en déduit, d'après le théorème des gendarmes, que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\infty.}$

9. **Variations de F :**
   On regroupe les renseignements trouvés dans les question précédentes dans le tableau suivant :

x	$-\frac{1}{2}$		0		α		$-\infty$
f	$+\infty$	$+$	1	$+$	0	$-$	-1
F	L		$\nearrow$		$F(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

Solution du problème 8.154

1. **Continuité de f :**
   Un quotient et une composée de fonctions continues sont continues, ce qui montre immédiatement que $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*}$. Par ailleurs, au voisinage de 0, on a :
$$\begin{array}{rcl} \ln(1+u) & = & u + \mathrm{o}(u) \\ \ln(1+t^2) & = & t^2 + \mathrm{o}\left(t^2\right) \\ \dfrac{\ln(1+t^2)}{t} & = & t + \mathrm{o}(t) \sim t \end{array}$$
   Ainsi, comme $\lim_{t\to 0} t = 0$, on déduit que :
$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t^2)}{t} = 0 = f(0),$$
   et donc $\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$ Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier continue sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc intégrable.

2. **Dérivabilité, dérivée et variations de G :**
   D'après la relation de Chasles on a :
$$G(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,dt = \int_x^1 f(t)\,dt + \int_1^{x^2} f(t)\,dt = -\int_1^x f(t)\,dt + \int_1^{x^2} f(t)\,dt = -F(x) + F(x^2),$$
   soit $\boxed{G(x) = F(x^2) - F(x)}$, où F est la primitive de f qui s'annule en 1. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f. La formule précédente indique alors que $\boxed{G \text{ est dérivable}}$, de dérivée :
$$G'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xf(x^2) - f(x).$$
   On déduit ainsi
$$G'(x) = \begin{cases} 2x\frac{\ln(1+(x^2)^2)}{x^2} - \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{(1+x^4)^2}{1+x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 0 \\ 2 \times 0 \times f(0^2) - f(0) = 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En particulier, $\boxed{G \text{ est croissante sur } [1, +\infty[}$ si et seulement si

$$x \geqslant 1 \Rightarrow \frac{(1+x^4)^2}{1+x^2} \geqslant 1.$$

Cela est vrai d'après :

$$1 \leqslant 1 + x^2 \leqslant (1+x^2)^2 \leqslant (1+x^4)^2,$$

puisque $x^2 \leqslant x^4$ si $x \geqslant 1$. Cela peut aussi être montré en étudiant la fonction $x \longmapsto \frac{(1+x^4)^2}{1+x^2}$.

3. **Calcul de $G(1/x)$:**
D'après la définition de G on a

$$G(1/x) \quad = \quad \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} f(t)\,dt$$

On fait le changement de variable $u(t) = \frac{1}{t}$ (c'est une bijection dérivable à dérivée non nulle sur tout segment $[x, x^2] \subset \mathbb{R}_+^*$ lorsque $x > 0$) ; on obtient :

$$\begin{aligned}
du &= -\frac{1}{t^2}\,dt \\
\frac{\ln(1+t^2)}{t}\,dt &= -\frac{1}{u}\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\,du \\
t = \frac{1}{x} &\Leftrightarrow u = x \\
t = \frac{1}{x^2} &\Leftrightarrow u = x^2 \\
G(1/x) &= \int_x^{x^2} -\frac{1}{u}\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\,du
\end{aligned}$$

D'où le résultat $\boxed{G\left(\frac{1}{x}\right) = -\int_x^{x^2} \frac{1}{u}\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\,du}$ par linéarité de l'intégrale.

4. **Encadrement de $-G(1/x)$:**
D'après la question précédente, on a

$$-G(1/x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{u}\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\,du.$$

Or l'inégalité $0 \leqslant \ln(1+v) \leqslant v$ (qui peut se montrer en étudiant la fonction $v \longmapsto \ln(1+v) - v$) entraîne :

$$0 \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right) \leqslant \frac{1}{u^2},$$

d'où, pour $u > 0$:

$$0 \leqslant \frac{1}{u}\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right) \leqslant \frac{1}{u^3}. \qquad (*)$$

En particulier, si $x > 1$, alors $x < x^2$, et donc cette inégalité a lieu pour tout $u \in [x, x^2]$. Par positivité de l'intégrale on obtient :

$$\int_x^{x^2} 0\,du \leqslant \int_x^{x^2} \frac{1}{u}\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\,du \leqslant \int_x^{x^2} \frac{1}{u^3}\,du.$$

Une primitive de la fonction nulle est 0 ; une primitive de la fonction $u \longmapsto \frac{1}{u^3}$ est $u \longmapsto -\frac{1}{2u^2}$, d'où

$$\int_x^{x^2} 0\,du = 0 \text{ et } \int_x^{x^2} \frac{1}{u^3}\,du = -\frac{1}{2(x^2)^3} - \left(-\frac{1}{2x^3}\right) \leqslant \frac{1}{2x^3}.$$

On en déduit $\boxed{0 \leqslant -G\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{2x^2}.}$ Dans le cas où $x \in]0,1[$ on a $0 < x^2 \leqslant x$, et pour $u \in [x^2, x]$ on a toujours l'encadrement $(*)$; en intégrant on obtient alors :

$$0 \geqslant -G\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^6}.$$

5. **Primitive de h :**
On remarque que

$$h(t) = \frac{2\ln t}{t} = \frac{d}{dt}(\ln t)^2.$$

Ainsi $\boxed{h \text{ admet pour primitive } t \longmapsto (\ln t)^2}$.

Relation entre $G(x)$ et $G(1/x)$:
On a :

$$\frac{\ln(1+t^2)}{t} = \frac{\ln(1+t^2) - \ln t^2 + \ln t^2}{t} = \frac{\ln(\frac{1+t^2}{t^2}) + \ln t^2}{t} = \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) + \frac{\ln(t^2)}{t}.$$

On déduit, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int_x^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{t}\,dt \\
&= \int_x^{x^2} \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt + \int_x^{x^2} \frac{\ln(t^2)}{t}\,dt \\
&= -G(1/x) + \left[(\ln t)^2\right]_{t=x}^{t=x^2} \\
&= -G(1/x) + (\ln(x^2))^2 - (\ln x)^2 \\
&= -G(1/x) + (2\ln x)^2 - (\ln x)^2 = -G(1/x) + 3(\ln x)^2
\end{aligned}$$

On a bien $\boxed{G(x) = -G\left(\frac{1}{x}\right) + 3(\ln x)^2.}$

Limite de $G(x)$:
L'encadrement de $G(1/x)$ obtenu à la question 4, combiné avec la relation précédente donne immédiatement $\boxed{3(\ln x)^2 \leqslant G(x) \leqslant 3(\ln x)^2 + \frac{1}{2x^2}.}$ Cet encadrement est vrai sur $]0, +\infty[$ qui est un voisinage de $+\infty$, et de plus les deux bornes tendent vers $+\infty$. On déduit donc que $\boxed{G \text{ tend vers } +\infty \text{ en } +\infty.}$

SOLUTION DU PROBLÈME 8.157

1. **Définition de f :**

   (a) **Continuité de δ :**

Il est clair que $\boxed{\delta \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*}$, puisque ln et les polynômes X et X^2+1 sont continus, ainsi que la composée et le quotient de deux fonctions continues. En 0 on a :

$$\ln(1+x^2) \sim x^2 \quad (\text{ d'après } \ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u \text{ et } \lim_{x\to 0} x^2 = 0).$$

Donc

$$\delta(x) \sim \frac{x^2}{x} = x,$$

donc

$$\lim_{x\to 0} \delta(x) = 0 = \delta(0).$$

Ainsi $\boxed{\delta \text{ est aussi continue en } 0}$.

(b) **Définition de φ, G et f :**
Comme la fonction δ est continue, elle admet bien des primitives sur $\mathbb{R}$, par exemple celle qui s'annule en 0, noté φ. Comme δ est continue, d'après les théorèmes de calcul sur les fonctions continues, il en est de même de g sur $\mathbb{R}_+^*$, donc g admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$, par exemple celle qui s'annule en 1, noté G. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ car φ l'est.

2. **Comportement de f au voisinage de 0 :**

(a) **Développement limité de δ à l'ordre 3 en 0 :**
On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+u} &= 1-u+\mathrm{o}(u) \text{ en } u=0\\
\text{donc } \ln(1+u) &= u-\frac{u^2}{2}+\mathrm{o}\left(u^2\right)\\
\text{donc } \ln(1+x^2) &= x^2-\frac{x^4}{2}+\mathrm{o}\left(x^4\right) \text{ en } x=0\\
\text{donc } \delta(x) &= x-\frac{x^3}{2}+\mathrm{o}\left(x^3\right) \text{ en } x=0
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\delta(x) = x-\frac{x^3}{2}+\mathrm{o}\left(x^3\right)}$.

(b) **Développement limité de φ à l'ordre 4 en 0 :**
Comme δ admet un développement limité à l'ordre 3 en 0, sa primitive φ admet le développement limité :

$$\varphi(x) = \varphi(0)+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\mathrm{o}\left(x^4\right),$$

soit $\boxed{\varphi(x) = \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\mathrm{o}\left(x^4\right)}$.

(c) **Prolongement par continuité de f en 0 :**
D'après la question précédente, en 0, on a :

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2} = \frac{1}{2}-\frac{x^2}{8}+\mathrm{o}\left(x^2\right).$$

On voit ainsi que f se prolonge par continuité en 0, en prenant $\boxed{f(0) = \frac{1}{2}}$.

Dérivabilité et dérivée de f en 0 :
L'existence d'un développement limité en zéro à l'ordre 1 en 0 indique que f est dérivable en zéro, et la dérivée est donnée par le coefficient du terme de degré 1, à savoir $\boxed{f'(0) = 0}$.

3. **Étude des variations de f :**

   (a) **Inégalité (1) :**

   Comme la fonction ln est strictement croissante, pour $x > 0$, on a $\ln(1+x) > \ln(1) = 0$, soit $\boxed{0 < \ln(1+x)}$. Par ailleurs, soit la fonction α définie par :

$$\alpha(x) = \ln(1+x) - x.$$

   La fonction α est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On calcule :

$$\alpha'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1} < 0 \text{ si } x > 0.$$

   Ainsi α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ d'où, pour tout $x > 0$:

$$\alpha(x) < \alpha(0) = 0,$$

   soit $\boxed{\ln(1+x) < x}$.

   Inégalité (2) :

   Pour $x > 0$, comme $1 + x^2 > 0$ et $x^2 > 0$, leur quotient est strictement positif, soit $\boxed{0 < \frac{x^2}{1+x^2}}$. Par ailleurs, soit la fonction β définie par :

$$\beta(x) = \ln(1+x^2) - \frac{x^2}{1+x^2}.$$

   La fonction β est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On calcule :

$$\beta'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - \left(\frac{2x(1+x^2) - x^2(2x)}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{2x^3}{(1+x^2)^2} > 0 \text{ si } x > 0.$$

   Ainsi β est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ d'où, pour tout $x > 0$:

$$\beta(x) > \beta(0) = 0,$$

   soit $\boxed{\frac{x^2}{1+x^2} < \ln(1+x^2)}$.

   (b) **Inégalité (3) :**

   Soit la fonction a définie par :

$$a(x) = 2\varphi(x) - x^2.$$

   La fonction a est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On calcule :

$$a'(x) = 2\delta(x) - 2x = 2\frac{\ln(1+x^2) - x^2}{x}.$$

   En mettant $x^2 > 0$ à la place de x dans l'inégalité (1), on a

$$0 < \ln(1+x^2) < x^2,$$

   d'où $a'(x) < 0$. Ainsi a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ d'où, pour tout $x > 0$:

$$a(x) < a(0) = 2\varphi(0) - 0 = 0,$$

   soit $\boxed{2\varphi(x) < x^2}$. Par ailleurs, soit la fonction b définie par :

$$b(x) = 2\varphi(x) - \ln(1+x^2).$$

La fonction b est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On calcule :

$$b'(x) = 2\delta(x) - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2}{x}\left(\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{1+x^2}\right),$$

d'où $b'(x) > 0$ pour $x > 0$, d'après l'inégalité (2). Ainsi b est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ d'où, pour tout $x > 0$:

$$b(x) > b(0) = 2\varphi(0) - 0 = 0,$$

soit $\boxed{\ln(1+x^2) < 2\varphi(x)}$.

Encadrement de $\varphi(1)$:
L'inégalité (3) appliquée avec $x = 1$ donne

$$\ln 2 < 2\varphi(1) < 1,$$

soit $\boxed{\frac{\ln 2}{2} < \varphi(1) < \frac{1}{2}}$.

(c) **Symétrie de f :**
Remarquons tout d'abord que f est paire. En effet la fonction δ est impaire puisque :

$$\delta(-x) = \frac{\ln(1+(-x)^2)}{(-x)} = -\frac{\ln(1+x^2)}{x} = -\delta(x).$$

On en déduit que la primitive de δ nulle en 0 est paire, *i.e.* $\boxed{\varphi \text{ est paire}}$. Et donc, pour $x \neq 0$:

$$f(-x) = \frac{\varphi(-x)}{(-x)^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2} = f(x).$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est paire}}$. On peut donc restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+$.

(d) **Variations de f :**
Pour $x > 0$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2\varphi'(x) - 2x\varphi(x)}{x^4} \\ &= \frac{x^2\delta(x) - 2x\varphi(x)}{x^4} \\ &= \frac{\ln(1+x^2) - 2\varphi(x)}{x^3}, \end{aligned}$$

d'où $f'(x) < 0$ d'après l'inégalité (3). Ainsi f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. En utilisant la parité, on en déduit le $\boxed{\text{tableau de variations de } f}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

4. **Comportement de f en $+\infty$:**

(a) **Encadrement $0 < g(x) < \dfrac{1}{x^3}$:**

Pour tout $x > 0$ on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= \delta(x) - \frac{2\ln x}{x} \\ &= \frac{\ln(1+x^2)}{x} - \frac{2\ln x}{x} \\ &= \frac{\ln\left(\dfrac{1+x^2}{x^2}\right)}{x} \\ &= \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\boxed{\text{l'inégalité (1)}}$ où on a remplacé x par $\dfrac{1}{x^2} > 0$ donne :

$$0 < \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) < \frac{1}{x^2}.$$

D'après le calcul précédent, en divisant par $x > 0$, on en déduit bien que :

$$\boxed{0 < g(x) < \frac{1}{x^3}.}$$

(b) **Croissance de G :**
La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, d'après la question précédente, on a :

$$G'(x) = g(x) > 0.$$

Donc, d'après le principe de Lagrange, G est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) **G est majorée :**
Soit la fonction H définie par :

$$H(x) = G(x) + \frac{1}{2x^2}.$$

Alors H est dérivable et, d'après la question 4(a), on a :

$$H'(x) = G'(x) - \frac{1}{x^3} = g(x) - \frac{1}{x^3} < 0.$$

Donc H est strictement décroissante. En particulier, pour tout $x \geqslant 1$ on a $H(x) \leqslant H(1)$, soit :

$$G(x) + \frac{1}{2x^2} \leqslant G(1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

soit :

$$G(x) \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Ainsi, au voisinage de $+\infty$ (plus précisément sur $[1, +\infty[$) on a $\boxed{G(x) \leqslant \frac{1}{2}.}$

(d) **Convergence de G en $+\infty$:**
D'après les deux questions précédentes, G est croissante et majorée, donc G converge, $\boxed{\text{d'après le théorème de la limite monotone.}}$

(e) **Relation $\varphi(x) = (\ln x)^2 + G(x) + \varphi(1)$. :**
Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int_1^x g(t)\,dt \\
&= \int_1^x \delta(t)\,dt - \int_1^x \frac{2\ln t}{t}\,dt \\
&= \varphi(x) - \varphi(1) - \int_1^x \frac{2\ln t}{t}\,dt \\
\text{donc } \varphi(x) &= G(x) + \int_1^x \frac{2\ln t}{t}\,dt + \varphi(1)
\end{aligned}$$

Comme

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x},$$

on reconnaît que :

$$\frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2\frac{d}{dt}\ln x \times (\ln x)^{2-1} = \frac{2\ln x}{x},$$

donc

$$\int_1^x \frac{2\ln t}{t}\,dt = (\ln x)^2 - (\ln 1)^2 = (\ln x)^2,$$

et finalement $\boxed{\varphi(x) = (\ln x)^2 + G(x) + \varphi(1)}$.

(f) **Limite de f en $+\infty$:**
D'après la question précédente, pour tout $x > 0$, on a :

$$f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + \frac{G(x) + \varphi(1)}{x^2}.$$

Comme $\ln x = \mathrm{o}(x)$ en $+\infty$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = 0.$$

D'après la question 4(d), Comme $G(x)$ converge en $+\infty$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{G(x) + \varphi(1)}{x^2} = 0.$$

D'où : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f = 0.}$

Solutions des exercices du chapitre 9

Solution de l'exercice 9.7

Le calcul montre que les droites (D_1) et (D_2) se coupe en un unique point $M\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Les trois droites sont concourantes si et seulement si $M \in (D_3)$, ce qui ne se produit que lorsque $\boxed{a = -\frac{1}{2}.}$

Solution de l'exercice 9.8

Les droites se coupent en un seul point $\boxed{B\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)}$ si et seulement si $\boxed{a \neq b \text{ et } a \neq -b.}$ Alors la droite (AB) a pour équation cartésienne :

$$\boxed{-b^2x + a^2y - ab(a-b) = 0.}$$

Si $a = b$ les deux droites sont égales ; si $a = -b$ les deux droites sont parallèles et disjointes.

Solution de l'exercice 9.9

On trouve :

$$\boxed{A\begin{pmatrix} (1-k)x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k-1}{y}\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad -\frac{x}{x_0} + \frac{ky}{y_0} + 1 - k = 0 \quad (D).}$$

Solution de l'exercice 9.10

1. **Intersection des droites (D_1) et (D_2) :**
   On a :
   $$M(x,y) \in (D_1) \cap (D_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2 &= 0 \\ 2x + 5y - 2 &= 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow x = 6 \text{ et } y = -2.$$
   Les droites (D_1) et (D_2) se coupent donc en un unique point $\boxed{I \text{ de coordonnées } (6, -2).}$
2. **Toute droite (D_m) passe par I :**
   Pour tout $m \in \mathbb{R}$, le calcul donne :
   $$m \times 6 + (3m-1) \times (-2) - 2 = 0.$$
   Donc les coordonnées du point I vérifient l'équation cartésienne de (D_m) *i.e.* $\boxed{I \in (D_n)}$
3. **Les droites (Δ_m) sont concourantes en J :**
   Les droites Δ_0 et Δ_1 d'équations $y - 1 = 0$ et $3x - 1 = 0$ se coupent en un unique point $\boxed{J\left(\frac{1}{3}, 1\right)}$.
   Pour tout $m \in \mathbb{R}$ le calcul donne :
   $$3m \times \frac{1}{3} + (1-m) \times 1 - 1 = 0,$$
   Donc les coordonnées du point J vérifient l'équation cartésienne de (Δ_m) *i.e.* $\boxed{I \in (D_n),}$ pour tout m.
4. **Droite commune aux deux familles de droites $(D_m)_{m\in\mathbb{R}}$ et $(\Delta_m)_{m\in\mathbb{R}}$:**

Si une telle droite existe, d'après les questions 2 et 3, elle passe par les points I et J, donc c'est la droite (IJ).Connaissant les coordonnées des points I et J on calcule une équation cartésienne de la droite (IJ) à savoir :

$$\boxed{9x + 17y - 20 = 0.}$$

Comme deux droites sont égales si et seulement si leurs équations cartésiennes sont proportionnelles on a :

$$(IJ) = (D_m) \Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R},\ (m, 3m-1, -2) = t(9, 17, -20) \Leftrightarrow m = \frac{9}{10}.$$

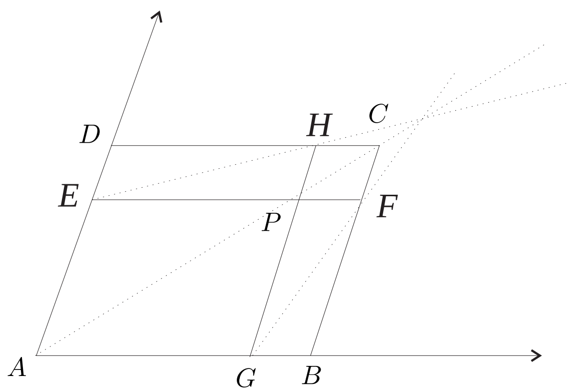
$$(IJ) = (\Delta_m) \Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R},\ (3m, 1-m, -1) = t(9, 17, -20) \Leftrightarrow = \frac{3}{20}.$$

Ainsi on a $\boxed{(IJ) = (D_{\frac{9}{10}}) = (\Delta_{\frac{3}{20}}).}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.12

Les droites (D) et (D') sont parallèles si et seulement si $\boxed{m \in \{3, -3\}.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.13



1. **Coordonnées des points $A, B, C, D, E, F, G, H, P$:**
   On trouve immédiatement

$$\boxed{A(0,0)\ ;\ B(1,0)\ ;\ C(1,1)\ ;\ D(0,1)\ ;\ E(0,y_0)\ ;\ F(1,y_0)\ ;\ G(x_0,0)\ ;\ H(x_0,1)\ ;\ P(x_0,y_0).}$$

2. **Condition sur x_0 et y_0 :**
   La condition imposée à P est de ne pas être sur la droite (BD). D'après les valeurs des coordonnées de B et D on peut calculer l'équation cartésienne de la droite (BD). On trouve :

$$\boxed{(BD) : x + y - 1 = 0.}$$

   La condition est donc : $\boxed{x_0 + y_0 \neq 1.}$

3. **Équation paramétrique de (GF) :**
   La droite (GF) passe par $G(x_0, 0)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{GF} = (1 - x_0, y_0)$. On a donc une équation paramétrique de la forme :

$$\boxed{(GF) : \begin{cases} x = x_0 + \lambda(1 - x_0) \\ y = \lambda y_0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

4. **Équation cartésienne de (AC) :**
Les équations de droite du plan sont de la forme $ax + by + c = 0$. Les conditions $A \in (AC)$ et $C \in (AC)$ imposent :
$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$
La droite $5AC)$ a donc pour équation, par exemple : $\boxed{x - y = 0.}$

5. **Équations cartésiennes et paramétriques de (EH) :**
La droite (EH) passe par $E(0, y_0)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{EH} = (x_0, 1 - y_0)$. On a donc une équation paramétrique de la forme :
$$\boxed{(EH) : \begin{cases} x = \lambda x_0 \\ y = y_0 + \lambda(1 - y_0) \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$
Comme $\overrightarrow{EH} = (x_0, 1 - y_0)$ est un vecteur directeur de (EH) on a une équation cartésienne de la forme :
$$(1 - y_0)x - x_0 y + c = 0,$$
où c est une constante à déterminer. Comme E appartient à (EH) on déduit : $-x_0 y_0 + c = 0$, soit $c = x_0 y_0$. Donc finalement la droite (EH) a pour équation cartésienne :
$$\boxed{(EH)\ :\ (1 - y_0)x - x_0 y + x_0 y_0 = 0.}$$

6. **Intersection des droites (GF) et (AC) :**
On a :
$$M(x, y) \in (GF) \cap (AC) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + \lambda(1 - x_0) \\ y = \lambda y_0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$
Alors on a : $x_0 + \lambda(1 - x_0) = x = y = \lambda y_0$
d'où : $\lambda(x_0 + y_0 - 1) = x_0$. Comme $\boxed{\text{on a imposé } x_0 + y_0 - 1 \neq 0 \text{ (cf. question 2)}}$ il y a donc un seul point d'intersection M de coordonnées : $x = y = \frac{x_0}{x_0 + y_0 - 1} y_0$. En résumé :
$$\boxed{(GF) \cap (AC) = \{\, M \,\} \text{ avec } M\left(\frac{x_0 y_0}{x_0 + y_0 - 1}, \frac{x_0 y_0}{x_0 + y_0 - 1}\right).}$$

7. **Conclusion :**
Les trois droites (EH), (FG) et (AC) sont concourantes si et seulement si $\boxed{M \text{ appartient à } (EH).}$
Il suffit donc de vérifier si les coordonnées du point M trouvé à la question 6 satisfont à l'équation de la droite (EH) trouvée à la question 5 :
$$\begin{aligned} (1 - y_0)x - x_0 y + x_0 y_0 &= (1 - y_0)\left(\frac{x_0 y_0}{x_0 + y_0 - 1}\right) - x_0\left(\frac{x_0 y_0}{x_0 + y_0 - 1}\right) + x_0 y_0 \\ &= (1 - y_0 - x_0)\left(\frac{x_0 y_0}{x_0 + y_0 - 1}\right) + x_0 y_0 \\ &= -x_0 y_0 + x_0 y_0 = 0 \end{aligned}$$
Donc $\boxed{\text{les trois droites sont bien concourantes.}}$

Solution de l'exercice 9.15

2. On a :

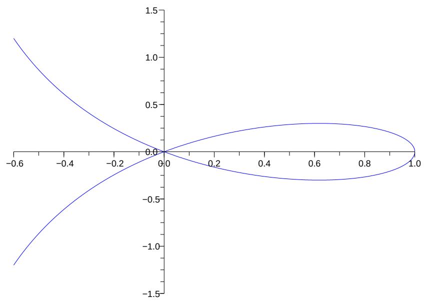
$$x'(t) = \frac{(1-2t^2)(1+t^2)-(t^2-1)(2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

$$x'(t) = \frac{(1-3t^2)(1+t^2)-(t^3-t)(2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{-t^4-4t+1}{(1+t^2)^2} = -\frac{-(t^2+2-\sqrt{5})(t^2+2+\sqrt{5})}{(1+t^2)^2}$$

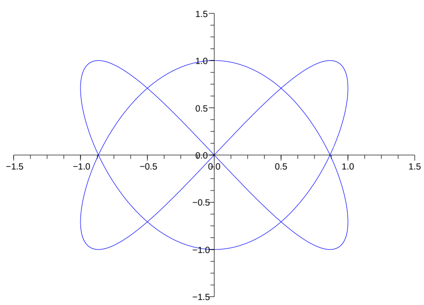
D'où :

t	-2		$-\sqrt{\sqrt{5}-2}$		0		$\sqrt{\sqrt{5}-2}$		2
$x'(t)$		$+$			0			$-$	
$y'(t)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$x(t)$	$-\frac{3}{5}$	$\nearrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$		$\searrow$	$-\frac{3}{5}$
$y(t)$	$\frac{6}{5}$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$-\frac{6}{5}$

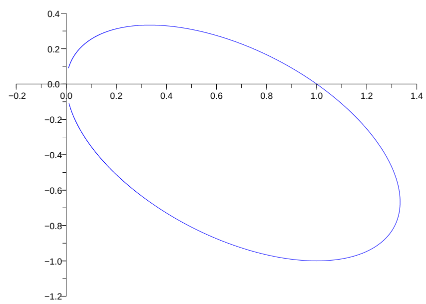
Remarque : les fonctions x et y sont respectivement paire et impaire.



3.



4.



Solution de l'exercice 9.17

Les vecteurs ne sont jamais colinéaires car leur produit vectoriel n'est pas nul, pour tout m.

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.21

1. Équation cartésienne du plan (ABC) : $-4x + 2y + 15z - 28 = 0$.
2. Le plan (ABC) passe par D si et seulement si $m = \dfrac{1}{4}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.25

Si $m = 3$, on a : $(D) \subset (P)$. Sinon le plan et la droite se coupent en un seul point.

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.26

Le système d'équation est celui de l'intersection de deux plans dans l'espace (équations de la forme $ax + by + cz + d = 0$) qui ne sont pas parallèles (puisque les équations $aX + bY + cZ = 0$ de leurs directions ne sont pas proportionnelles) ; c'est donc une droite. On a de plus :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (D) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z - 6 = 0 \\ 4x - 3y - 6z - 4 = 0 \\ 2x - y + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow [\text{calculs}] \Leftrightarrow (x, y, z) = (1, -2, 1).$$

Donc la droite (D) coupe le plan (P) en un unique point qui est le point $M\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.31

L'intersection de ces deux plans est formée des points $M(x, y, z)$ tels que (x, y, z) vérifie chacune des deux équations cartésienne *i.e.* soit solution du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \quad L_1 \\ x + a^2y + a^2z &= a \quad L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z + x &= 1 \quad L_1 \\ (1 - a^2)x &= a - a^2 \quad L_2 - a^2L_1 \end{cases}.$$

Ainsi trois situations sont possibles :

1. Si $1 - a^2 \neq 0$: alors on a un système échelonné dont l'ensemble des solutions peut être paramétré par une inconnue, par exemple :

$$\begin{cases} x &= \dfrac{a - a^2}{1 - a^2} \\ z &= 1 - x - y = 1 - \dfrac{a - a^2}{1 - a^2} - y \end{cases}, \ y \in \mathbb{R},$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= \dfrac{a - a^2}{1 - a^2} \\ y &= t \\ z &= 1 - x - y = 1 - \dfrac{a - a^2}{1 - a^2} - t \end{cases}.$$

On reconnaît alors l'équation paramétrique de la $\boxed{\text{droite } (D)}$ passant par le point $A\left(\dfrac{a - a^2}{1 - a^2}, 0, 1 - \dfrac{a - a^2}{1 - a^2}\right)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (0, 1, -1)$.

2. Si $a = 1$: le système obtenu s'écrit :

$$\begin{cases} y + z + x &= 1 \quad L_1 \\ 0 &= 0 \quad L_2 - a^2L_1 \end{cases} \Leftrightarrow y + z + x = 1.$$

$\boxed{\text{L'intersection de } (P_1) \text{ et } (P_2) \text{ est donc } (P_1),}$ et d'ailleurs $(P_1) = (P_2)$.

3. Si $a = -1$: le système obtenu s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rcll} y+z+x & = & 1 & L_1 \\ 0 & = & 2 & L_2 - a^2 L_1 \end{array}\right. ,$$

et ne possède donc pas de solution. Ainsi $\boxed{(P_1) \text{ et } (P_2) \text{ ne se coupent pas}}$; il sont parallèles, ce qui se voyait aussi dès le départ car les équations de (P_1) et (P_2) sont :

$$x+y+z-1 = 0 \text{ et } x+y+z+1 = 0.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.32

1. **Équation cartésienne de (P) :**
Le plan (P) passe par A et est dirigé par les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = (2,2,5) \text{ et } \overrightarrow{AC} = (1,1,-1).$$

Il admet donc le paramétrage suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} x & = & 1+2t+s & L_1 \\ y & = & 2+2t+s & L_2 \\ z & = & 5t-s & L_3 \end{array}\right. \qquad s,t \in \mathbb{R}$$

Après un pivot de Gauss ceci donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} x & = & 1+2t+s & L_1 \\ z+x & = & 1+7t & L_3+L_1 \\ y-x & = & 1 & L_2-L_1 \end{array}\right.$$

L'équation de cartésienne de (P) est donc $\boxed{y - x = 1.}$

2. **Équation paramétrique de (DE) :**
La droite (DE) passe par D et est dirigé par le vecteur suivant, non nul pour tout valeur de m :

$$\overrightarrow{DE} = (m-4, 2, -3).$$

Elle admet donc le paramétrage suivant :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4+(m-4)t \\ y & = & 3+2t \\ z & = & 6-3t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}}$$

3. **Calcul de $(P) \cap (DE)$:**
Un point M de coordonnées (x, y, z) appartient à l'intersection $(P) \cap (DE)$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4+(m-4)t \\ y & = & 3+2t \\ z & = & 6-3t \\ y-x & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4+(m-4)t \\ y & = & 3+2t \\ z & = & 6-3t \\ (3+2t)-(4+(m-4)t) & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 4+(m-4)t \\ y & = & 3+2t \\ z & = & 6-3t \\ t(6-m) & = & 2 \end{array} \right.$$

On voit que deux cas se présentent :

– $\boxed{\text{Si } m \neq 6}$: il existe une solution $t = \frac{2}{6-m}$ si et seulement si :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 4+(m-4)\frac{2}{6-m} = \frac{16-2m}{6-m} \\ y & = & 3+\frac{4}{6-m} = \frac{22-3m}{6-m} \\ z & = & 6-\frac{6}{6-m} = \frac{30-6m}{6-m} \end{array} \right.}$$

Ainsi l'intersection $\boxed{(P)\cap(DE) \text{ comporte un seul point } M}$ dont les coordonnées sont celles données ci-dessus.

– $\boxed{\text{Si } m = 6}$: il n'existe pas de solution au système. Cela correspond au fait que le plan (P) et la droite (DE) sont disjoints (et donc parallèles) ; $\boxed{\text{l'intersection } (P)\cap(DE) \text{ est vide.}}$

4. **Équation du plan (P') parallèle à (P) et passant par D :**
D'après l'équation cartésienne de (P), la direction commune de (P) et (P') est

$$\left\{ (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; Y-X=0 \right\}$$

Ainsi (P') a une équation de la forme

$$y-x+d=0,$$

où d est une constante réelle. On détermine d avec la condition $D \in (P')$. On trouve : $\boxed{y-x=-1.}$

Solution de l'exercice 9.33

1. **Les points A, B et C ne sont pas alignés :**
Il suffit de vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, ce qui est le cas puisque

$$\overrightarrow{AB} = (1,-2,1) \text{ et } \overrightarrow{AC} = (1,-4,3).$$

2. **Équation cartésienne du plan (P) :**
C'est une équation du type

$$ax+by+cz+d=0 \text{ avec } (a,b,c) \neq (0,0,0).$$

Les conditions $A, B, C \in (P)$ donnent alors le système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b-c+d & = & 0 \\ a-b+d & = & 0 \\ a-3b+2c & = & 0 \end{array} \right.$$

En résolvant par la méthode du pivot de Gauss on obtient $a=b=c$ et $d=0$. Ainsi le plan (P) a pour équation

$$\boxed{x+y+z=0}$$

3. **Appartenance de $\overrightarrow{u}$ à $\overrightarrow{P}$:**

On sait que la direction d'un plan d'équation $ax + by + cz + d =$ est le plan vectoriel d'équation $aX + bY + cZ = 0$; ainsi $\overrightarrow{P}$ a pour équation $X + Y + Z = 0$. On voit facilement alors que les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ ne vérifient pas l'équation de $\overrightarrow{P}$ puisque :

$$(-1) + (1) + (-1) = -1 \neq 0.$$

Ainsi $\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{u} \text{ n'appartient pas à } \overrightarrow{P}.}$ On en déduit en particulier que toute droite dirigée par $\overrightarrow{u}$ est sécante au plan (P).

4. **Calcul de (x', y', z') en fonction de x, y et z. :**
La droite passant par M de coordonnées (x, y, z) et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (-1, 1, -1)$ admet pour paramétrage :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x - \lambda \\ y' & = & y + \lambda \\ z' & = & z - \lambda \end{array}\right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Elle coupe donc le plan (P) d'équation $x' + y' + z' = 0$ au point paramétré par λ tel que

$$(x - \lambda) + (y + \lambda) + (z - \lambda) = 0$$

i.e. $\lambda = x + y + z$ c'est-à-dire le point de coordonnées

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x - (x + y + z) = -y - z \\ y' & = & y + (x + y + z) = x + 2y + z \\ z' & = & z - (x + y + z) = -x - y \end{array}\right.$$

On a donc $\boxed{(x', y', z') = (-y - z, x + 2y + z, -x - y).}$

5. **Matrice M :**
C'est une conséquence directe du résultat de la question précédente. On trouve :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

6. **Calcul de M^n :**
On calcule (à la main ou à la machine) :

$$M^2 = MM = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = M.$$

Plus généralement, montrons $\boxed{\text{par récurrence sur } n,}$ à partir de $n = 1$ la relation $\mathcal{R}(n)$ suivante :

$$M^n = M$$

- $\mathcal{R}(1)$ est évidemment vraie puisqu'elle signifie $M^1 = M$.
- $\mathcal{R}(2)$ signifie $M^2 = M$; elle est donc vraie d'après le calcul fait juste avant.
- Montrons $\mathcal{R}(n) \Rightarrow \mathcal{R}(n + 1)$, c'est-à-dire que l'on suppose que $\mathcal{R}(n)$ est vraie et l'on montre qu'alors $\mathcal{R}(n + 1)$ est vraie aussi. On a :

$$\begin{array}{lcl} M^{n+1} & = & M^n M \\ & = & MM \text{ (d'après } \mathcal{R}(n)) \\ & = & M \text{ (d'après } \mathcal{R}(2)). \end{array}$$

En conclusion :

$$\boxed{M^0 = I_2 \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ M^n = M.}$$

Solution de l'exercice 9.52

Comme A est le centre du cercle $(\mathcal{C})$ c'est aussi le milieu du segment BC *i.e.* : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{MC} &\Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{BM} \middle| \overrightarrow{MC} \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \middle| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} \right\rangle = 0 \qquad \text{d'après la relation de Chasles} \\
&\Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM} \middle| \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} \right\rangle = 0 \qquad \text{d'après la remarque du début} \\
&\Leftrightarrow \left\| \overrightarrow{AC} \right\|^2 - \left\| \overrightarrow{AM} \right\|^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\| \overrightarrow{AM} \right\| = \left\| \overrightarrow{AC} \right\| \\
&\Leftrightarrow M \in (\mathcal{C})
\end{aligned}$$

Cette démonstration reste valable pour une sphère dans l'espace.

Solution de l'exercice 9.55

1. Le vecteur $(1, 1, 1)$ est orthogonal au plan. Ainsi la droite orthogonale à (P) passant par M est paramétrée par :

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + t \end{cases}$$

   Cette droite rencontre le plan (P) au point de paramètre t tel que $x_0 + y_0 + z_0 + 3t = 0$. Donc Q a pour coordonnées

$$\left(x_0 - \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3}, y_0 - \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3}, z_0 - \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3} \right)$$

2. Le plan rencontre la sphère de centre M et de rayon $r = \|\overrightarrow{PQ}\|$ en un seul point, donc il lui est tangent. Le rayon recherché est donc :

$$r = \|\overrightarrow{PQ}\| = \left| \frac{x + y + z}{3} \right| \sqrt{3}.$$

Solution de l'exercice 9.56

1. Équation du cercle $(\mathcal{C})$: $x^2 + y^2 - x - y = 0$.
2. Projeté orthogonal de M sur la droite (AB) : $P \begin{pmatrix} \frac{1+a-b}{2} \\ \frac{1-a+b}{2} \end{pmatrix}$.
3. Les projetés orthogonaux sont $Q(a, 0)$ $R(0, b)$ et P et sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} \frac{1-a-b}{2} \\ \frac{1-a+b}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QR} = (-a, b)$ sont colinéaires, soit d'après la proposition 9.1.9 :

$$\frac{1 - a - b}{2} \times b - \frac{1 - a + b}{2} \times (-a) = 0$$

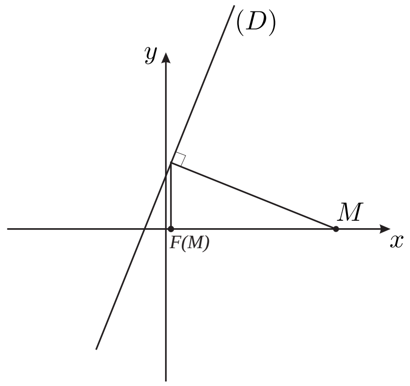
   soit, après calcul :

$$a^2 + b^2 - a - b = 0,$$

   soit $M \in (\mathcal{C})$, d'après la question 1.

Solution de l'exercice 9.61

1. **Dessin :**



2. **Calcul de $f(t)$:**
Le point $(f(t), g(t))$ est la projection orthogonale de M sur (D) ; c'est donc l'intersection de (D) et de la droite orthogonale à (D) passant par M. Comme l'équation de (D) est $2x - y + 1 = 0$, un vecteur orthogonal à (D) est $(2, -1)$; la droite orthogonale à (D) issue de M de coordonnées $(t, 0)$ a donc pour paramétrage :
$$\begin{cases} x = t + 2\lambda, \\ y = -\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
L'intersection cette droite et de (D) est donc le point $(x, y) = (f(t), g(t)) = (t + 2\lambda, -\lambda)$ tel que λ vérifie :
$$2(t + 2\lambda) - (-\lambda) - 1 = 0 \Leftrightarrow 5\lambda = -2t - 1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{2t+1}{5}.$$
On déduit alors que :
$$(f(t), g(t)) = \left(t + 2\left(-\frac{2t+1}{5}\right), \frac{2t+1}{5}\right).$$
En particulier $\boxed{f(t) = \frac{t}{5} - \frac{2}{5}.}$

3. **Calcul de x_n :**
La suite (x_n) est définie par la relation de récurrence suivante :
$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$
Compte-tenu du calcul de f on voit que (x_n) est une suite arithmético-géométrique ; on sait donc (cours) calculer son terme général en fonction de n. Tous calculs faits on trouve
$$\boxed{x_n = \frac{1}{5^n}(x_0 + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = \frac{3}{2 \times 5^n} - \frac{1}{2}.}$$

4. **La distance de M_n à (D) tend vers 0 :**
On sait que, dans le plan, la distance du point N de coordonnées (x_0, y_0) à la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ vaut :
$$d(N, (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dans le cas présent on a donc :

$$\boxed{d(M_n,(D)) = \frac{|2x_n+1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3}{5^n}\right).}$$

Comme la suite $\left(\frac{3}{5^n}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on déduit que $\boxed{\text{la distance de } M_n \text{ à } (D) \text{ tend vers } 0.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.73

On trouve les résultats suivants :

1. L'intersection de (P) et (D) est le point de coordonnées $(2,2,0)$
2. Le plan (Π) a pour équation $2y+z-4=0$.
3. M_0 est le point trouvé à la question 1 (à justifier rigoureusement).
4. Le vecteur recherché est $\overrightarrow{u}=(1,0,0)$.
5. Le plan (P') a pour équation $x-2=0$.

Solutions des exercices du chapitre 10

Solution de l'exercice 10.1

1. libre.
2. liée.
3. liée.
4. libre.
5. liée.
6. liée.
7. libre.
8. liée.
9. liée.
10. liée.
12. libre (famille canonique).
13. liée.
14. liée.
15. libre.

Solution de l'exercice 10.2

1. libre si et seulement si $m \notin \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.
2. libre si et seulement si $m \notin \{3, 1\}$.
5. libre si et seulement si $m \notin \{1, -2\}$.
6. libre si et seulement si $m \notin \{1, 2\}$.
7. libre si et seulement si $m \notin \{-1, 0, 1\}$.

Solution de l'exercice 10.3

1. libre (sous-famille d'une famille libre).
2. libre.
3. libre.
4. liée (le dernier vecteur est somme des deux premiers).
5. libre.
6. libre.
8. liée ($u-v+w = \frac{1}{2}(u+v-w)+\frac{1}{2}(u-3v+3w)$).

Solution de l'exercice 10.4

Par l'absurde si $u \wedge v = ru + sv$ (cf. proposition 10.1.8, n°2), alors on a :

$$\begin{aligned} \|u \wedge v\|^2 &= \langle u \wedge v | u \wedge v \rangle \\ &= \langle u \wedge v | ru + sv \rangle \\ &= r\langle u \wedge v | u \rangle + s\langle u \wedge v | v \rangle \text{ (le produit scalaire est bilinéaire)} \\ &= 0 \qquad \text{car } u \perp u \wedge v \text{ et } v \perp u \wedge v \end{aligned}$$

Donc $u \wedge v = 0$ c'est-à-dire que u, v sont liés (cf. proposition 9.1.9) ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 10.6

1. génératrice.
2. engendre la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ d'équation $-5x + 3y = 0$.
3. engendre la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ d'équation $-x + 3y = 0$.
4. engendre la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ d'équation $-x + 3y = 0$.
5. engendre la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ d'équation $-x + y = 0$.
6. engendre l'ensemble à un point $(0, 0)$, d'équation $x = y = 0$.
7. génératrice.
8. génératrice.

Solution de l'exercice 10.8

On trouve que : $(a, b, c, d) \in \text{vect}((1, 2, 3, 4),\ (0, 1, 2, 3),\ (0, 0, 1, 2)) \Leftrightarrow b + d - 2c = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.10

1. $u = (2, 1, 3) - 2\,(1, 1, 0) \in F$.
2. $u = (1, -2, 0, 3) + 3(2, 3, 0, -1) - 2(2, -1, 2, 1) \in F$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.11

$$u \in F \Leftrightarrow m = 1.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.12

Le vecteur $3j^2e_3$ appartient à l'espace engendré par v_1, v_2 et v_3 si et seulement s'il existe $x, y, z \in \mathbb{C}$ tels que

$$xv_1 + v_2 + zv_3 = 3j^2e_3. \quad (S)$$

Cette dernière équation équivaut aussi à :

$$x(e_1 + e_2 + e_3) + y(e_1 + je_2 + j^2e_3) + z(e_1 + j^2e_2 + je_3) = 3j^2e_3$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)e_1 + (x + jy + j^2z)e_2 + (x + j^2y + jz)e_3 = 3j^2e_3.$$

Comme (e_1, e_2, e_3) est une famille libre cela équivaut encore au système :

$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \quad L_1 \\ x + jy + j^2z & = 0 \quad L_2 \\ x + j^2y + jz & = 3j^2 \quad L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z & = 0 \quad L_1 \\ (j-1)y + (j^2-1)z & = 0 \quad L_2 - L_1 \to L_2 \\ (j^2-1)y + (j-1)z & = 3j^2 \quad L_3 - L_1 \to L_3 \end{cases}$$

Comme $j^2 - 1 = (j-1)(j+1)$ et que $j - 1 \neq 0$ on simplifie les deux dernières lignes par $j - 1$:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z & = 0 \quad L_1 \\ y + (j+1)z & = 0 \quad L_2 \\ (j+1)y + z & = \frac{3j^2}{j-1} \quad L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z & = 0 \quad L_1 \\ y + (j+1)z & = 0 \quad L_2 \\ (1 - (j+1)^2)z & = \frac{3j^2}{j-1} \quad L_3 - (j+1)L_2 \end{cases}$$

On remarque alors que $j + 1 = -j^2$ puisque, d'après la formule de sommation des termes d'une suite géométrique :

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3}{1 - j} = 0.$$

On déduit :

$$1 - (j+1)^2 = 1 - (-j^2)^2 = 1 - j^4 = 1 - j \neq 0.$$

Ainsi le système est de cramer et il a bien une solution $x, y, z \in \mathbb{C}$ – et une seule en fait.

Remarque : si on termine les calculs on trouve plus précisément que $3j^2e_3 = j^2v_1 + v_2 + jv_3$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.13

1. Les vecteurs e_1, e_2 ne sont pas proportionnels à l'œil nu.
2. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ le vecteur $\lambda e_1 + \mu e_2$ est de la forme $(*, *, *, 0)$; comme e_3 n'est pas de cette forme on en déduit que $e_3 \notin \text{vect}(e_1, e_2)$. D'après la proposition 10.1.8, n°2, on en déduit que la famille e_1, e_2, e_3 est libre.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.14

Non, prendre par exemple dans $\mathbb{R}^2$ la famille à $p = 1$ vecteurs donnée par : $e_1 = (1, 0)$ et les vecteurs $f_1 = f_2 = (1, 1)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.16

Pour tout $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{K}^3$ et tout $s, t \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned}
& g(s(x,y,z) + t(x',y',z')) \\
= \ & g(sx+tx', sy+ty', sz+tz') \qquad \text{d'après la définition des opérations dans } \mathbb{K}^3 \\
= \ & [f(sx+tx', sy+ty', sz+tz') + 2(sx+tx') + (sy+ty'), f(2(sx+tx'), sz+tz', 0)] + [sx+tx', sz+tz'] \\
& \qquad \text{d'après la définition de } g \\
= \ & [f(s(x,y,z) + t(x',y',z')) + s(2x+y) + t(2x'+y'), f(s(2x,z,0) + t(2x',z',0))] + s\,[x,z] + t\,[x',z'] \\
= \ & [sf(x,y,z) + tf(x',y',z') + s(2x+y) + t(2x'+y'), sf(2x,z,0) + tf(2x',z',0))] + s\,[x,z] + t\,[x',z'] \\
& \quad \text{d'après la linéarité de } f \\
= \ & s\,[f(x,y,z) + (2x+y), f(2x,z,0)] + t\,[f(x',y',z') + (2x'+y'), f(2x',z',0)] + s\,[x,z] + t\,[x',z'] \\
= \ & sg(x,y,z) + tg(x',y',z')
\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.18

Il faut que $f(0,0,0) = (0,0,0)$, soit $\boxed{m = 0.}$ Inversement, lorsque $m = 0$ on peut vérifier facilement que f est linéaire.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.19

Même idée que dans l'exercice 10.18, mais avec un peu plus de calcul pour trouver les m, n qui conviennent.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.20

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.21

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.22

$$\mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} a+3 & b+1 & c \\ 2a & 0 & b+1 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.23

$$\mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} 2a_{1,1} & \cdots & 2a_{1,p} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2a_{n,1} & \cdots & 2a_{n,p} & n \end{pmatrix}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.24

$$f(x,y,z) = (x+y+z, x+y, y+z).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.26

L'application f est injective mais non surjective.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.27

Pour tout $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{K}$ on a :

$$f(x, y, z) = (a, b, c) \Leftrightarrow [\text{calculs}] \Leftrightarrow (x, y, z) = (-b, 3a - 2c, 3c - 4a),$$

donc f est bijective et f^{-1} est donnée par :

$$\boxed{f^{-1}(a, b, c) = (-b, 3a - 2c, 3c - 4a).}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.28

L'application f est bijective si et seulement si $m \neq -1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.29

L'application f est bijective car sa matrice est inversible (par le calcul).

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.30

$$f^{-1}(a, b, c) = (a - c, c + b - a, a - b).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.31

1. Par le calcul (un certain système est de Cramer).
2. $(1 + i, 2, i) = (7i - 8)a + (3 - 3i)b + (11 - 6i)c.$

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.33

2. $(x, y, z) = (a - b, b - c, c).$
3. L'ensemble de vecteurs recherché est l'espace engendré par le vecteur i.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.34

2. $w = 3u - v.$
3. On trouve que nécessairement $f(a, b) = (a + b, b)$ et réciproquement cela convient.
4. On trouve $a = 4$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.38

1. Utiliser la bilinéarité du produit scalaire.
2. $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
3. Par le calcul on a : $A^2 = I$,
4. donc $f \circ f = \mathrm{Id}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.40

Soient A et B les matrices de φ et ψ. La relation $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$ signifie que $AB = I$. D'après le corollaire 3.3.17 on sait que cela signifie que A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre ; en particulier on a : $BA = I$. Par conséquent on a $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$.

Solution de l'exercice 10.41

On a $u \in \ker f$ si et seulement si $f(u) = 0$. Par ailleurs la relation $f^2 = f + \mathrm{Id}$ donne :

$$f(f(u)) = f(u) + u.$$

Ainsi, si $u \in \ker f$, alors $u = 0$; par conséquent on a $\ker f = \{0\}$; donc f est injective. Comme f est un endomorphisme, cela signifie que f est bijective *i.e.* un automorphisme.
Autre méthode : compte-tenu de la linéarité de f la relation $f^2 = f + \mathrm{Id}$ s'écrit aussi $f \circ (f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$ ou $(f - \mathrm{Id}) \circ f = \mathrm{Id}$. Ainsi f est bijective, de réciproque $f - \mathrm{Id}$.

Solution de l'exercice 10.42

1. est un sous-espace vectoriel (droite vectorielle) ;
2. n'est pas un sous-espace vectoriel (ne contient pas le vecteur nul $(0, 0)$) ;
3. est un sous-espace vectoriel (droite vectorielle d'équation $x - y = 0$; c'est aussi l'espace engendré par le vecteur $(1, 1)$) ;
4. n'est pas un sous-espace vectoriel (ne contient pas le vecteur nul $(0, 0)$) ;
5. n'est pas un sous-espace vectoriel (non stable par somme : $(1, 1) + (1, -1) \notin \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$) ;
6. n'est pas un sous-espace vectoriel (non stable par produit par un scalaire *réel* : $\frac{1}{2}(1, 1) \notin \mathbb{Z}^2$).

Solution de l'exercice 10.43

1. est un sous-espace vectoriel (plan vectoriel) ;
2. n'est pas un sous-espace vectoriel (ne contient pas le vecteur nul $(0, 0)$) ;
3. est un sous-espace vectoriel (plan vectoriel) ;
4. n'est pas un sous-espace vectoriel (non stable par produit par un scalaire strictement négatif)
5. n'est pas un sous-espace vectoriel (non stable par somme) ; item est un sous-espace vectoriel (droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 1, 1)$) ;
6. est un sous-espace vectoriel (plan vectoriel) ;
7. n'est pas un sous-espace vectoriel (non stable par somme : $(0, 1, 1) + (1, 0, 1) \notin \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$) ;
8. est un sous-espace vectoriel (plan vectoriel) ;
9. n'est pas un sous-espace vectoriel (non stable par somme : $(1, 1, 1) + (2, 4, 0) \notin \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2\}$) ;
10. est un sous-espace vectoriel (plan vectoriel), car :

$$(x + y + 1)^2 - (x - y)^2 - 4xy - 1 = 2x + 2y;$$

11. n'est pas un sous-espace vectoriel (non stable par somme) ;

Solution de l'exercice 10.44

1. Si un tel plan P existe, il contient nécessairement tous les vecteurs u_m, pour tout $m \in \mathbb{R}$. Or :

$$u_m = (2m + 1, -m + 3, 3m - 2) = m(2, -1, 3) + (1, 3, -2) \in \mathrm{vect}((2, -1, 3), (1, 3, -2)).$$

   Donc il suffit de prendre $\boxed{P = \mathrm{vect}((2, -1, 3), (1, 3, -2)).}$
2. NON, la droite vectorielle dirigée par le vecteur $(2, -1, 3)$ n'est pas une droite D_m.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.46

1. Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$! analogue si $G \subset F$.
2. Par l'absurde si $x + y \in F \cup G$, alors $x + y \in F$ ou $x + y \in G$. Si $x + y \in F$ alors, comme F est stable par différence et que $x, x + y \in F$, on a
$$y = (x + y) - x \in F,$$
ce qui contredit le choix de y effectué. Si on avait $x + y \in G$ au départ, en permutant les rôles de F et G et les rôles de x et y on aboutit de même à une contradiction. Ainsi $x + y \in F \cup G$ n'est pas possible.
3. Si F n'est pas inclus dans G et G n'est pas inclus dans F, d'après la question précédente $F \cup G$ n'est pas stable par somme, donc n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Par contraposée, si $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel alors $F \subset G$ ou $G \subset F$, et la réciproque est vraie d'après la première question.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.47

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \ker f &\Leftrightarrow f(x, y) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y &= 0 \\ x - y &= 0 \\ 2x + 3y & \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y = 0. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\ker f = \{0\}.}$ L'image des vecteurs de la base canonique est :

$$f(1, 0) = (4, 1, 2) \qquad \text{et} \qquad f(0, 1) = (1, -1, 3).$$

Les deux vecteurs obtenus sont libres, donc l'image de f est le plan vectoriel $\boxed{\mathrm{Im}\, f = \mathrm{vect}((4, 1, 2), (1, -1, 3)).}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.48

On vu à l'exercice 10.28 que f est bijective si et seulement $\boxed{\text{si } m \neq -1\,;}$ dans ce cas f est injective et surjective *i.e.* $\boxed{\ker f = \{0\} \text{ et } \mathrm{Im}\, f = \mathbb{K}^2.}$

Lorsque $\boxed{m = -1}$ des calculs analogues à ceux de l'exercice 10.47 donnent $\boxed{\ker f = \mathrm{vect}(e_1 - e_2) \text{ et } \mathrm{Im}\, f = \mathrm{vect}(e_2).}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.49

1. **Noyau de f :**

On a :

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in\ker f &\Leftrightarrow f(x,y,z)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} -x+4y-2z &=0 & L_1\\ -2x+5y-2z &=0 & L_2\\ -3x+6y-2z &=0 & L_3\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} -x+4y-2z &=0 & L_1\\ -x+y &=0 & L_2-L_1\\ -2x+2y &=0 & L_3-L_1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow x=y \text{ et } z=\frac{3}{2}x\\
&\Leftrightarrow (x,y,z)\in \text{vect}\left(1,1,\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\ker f=\text{vect}\left(1,1,\frac{3}{2}\right).}$

2. **Image de f :**
On a $(a,b,c)\in \operatorname{Im} f$ si et seulement si le système suivant d'inconnues x,y,z admet des solutions

$$\left\{\begin{array}{lll} -x+4y-2z &=a & L_1\\ -2x+5y-2z &=b & L_2\\ -3x+6y-2z &=c & L_3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} -x+4y-2z &= a & L_1\\ -x+y &= b-a & L_2-L_1=L_2'\\ -2x+2y &= c-a & L_3-L_1=L_3'\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} -x+4y-2z &= a & L_1\\ -x+y &= b-a & L_2'\\ 0 &= c-a-2(b-a) & L_3'-2L_2'\end{array}\right.$$

Donc $\boxed{(a,b,c)\in \operatorname{Im} f \text{ si et seulement si } a-2b+c=0.}$

3. **Calcul de $\ker f\cap \operatorname{Im} f$:**
En utilisant les deux questions précédentes on trouve $\boxed{\ker f\cap\operatorname{Im} f=\{0\}.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.50

1. **Relation $g\circ f=0 \Rightarrow \operatorname{Im} f\subset \ker g$:**
Si y appartient à $\operatorname{Im} f$, alors il s'écrit $y=f(x)$, donc :

$$g(y)=g(f(x))=(g\circ f)(x)=0 \text{ car } g\circ f=0.$$

Ainsi y appartient à $\ker g$. On a donc montré que tout élément y de $\operatorname{Im} f$ appartient à $\ker g$, c'est-à-dire l'inclusion $\operatorname{Im} f\subset\ker g$.

Relation $g\circ f=0 \Leftarrow \operatorname{Im} f\subset \ker g$:
Pour tout $x\in\mathbb{K}^p$ on a $f(x)\in\operatorname{Im} f$, donc $f(x)\in\ker g$ puisque $\operatorname{Im} f\subset\ker g$. Ainsi on a :

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=0.$$

2. **Relation $\ker f\subset\ker(g\circ f)$:**
Si $x\in\ker f$ alors $f(x)=0$, donc :

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(0)=0,$$

donc x appartient à $\ker(g\circ f)$. On a donc montré que tout élément x de $\ker f$ appartient à $\ker(g\circ f)$, c'est-à-dire l'inclusion $\ker f\subset\ker(g\circ f)$.

3. **Relation $\mathbf{Im}\,(g \circ f) \subset \mathbf{Im}\, g$:**
   Tout élément z de $\mathrm{Im}\,(g \circ f)$ s'écrit $z = (g \circ f)(x)$ avec $x \in \mathbb{K}^p$. Alors z s'écrit aussi $z = g(y)$ avec $y = f(x) \in \mathbb{K}^n$; ainsi z appartient à $\mathrm{Im}\, g$. On a donc montré que tout élément x de $\mathrm{Im}\,(g \circ f)$ appartient à $\mathrm{Im}\, g$, c'est-à-dire l'inclusion $\mathrm{Im}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$.

Solution de l'exercice 10.51

Remarquer que la relation $f \circ f = \mathrm{Id}$ s'écrit aussi $(f + \mathrm{Id}\,) \circ (f - \mathrm{Id}\,) = 0$ ou $(f - \mathrm{Id}\,) \circ (f + \mathrm{Id}\,) = 0$ et utiliser l'indication.

Solution de l'exercice 10.54

1. Utiliser la définition d'un sous-espace vectoriel ou bien remarquer que :
$$F = \ker f \cap \ker g \text{ avec } f(a, b, c, d) = a - b \text{ et } g(a, b, c, d) = c - d,$$
   où les applications $f$et g sont linéaires d'après la proposition 10.2.2.
2. Une base de F est : $(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)$. Donc F est de dimension 2.
3. On remarque que $G = \ker h$ où l'application linéaire h est définie par :
$$h(a, b, c, d) = a + b - c.$$
   Par le calcul on trouve que G est de dimension 3 (plein de bases sont possibles).
4. Le sous-espace vectoriel $F \cap G$ a pour système d'équations cartésiennes :
$$\begin{cases} a - b & = 0 \\ c - d & = 0 \\ a + b - c & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = d = 2a = 2b$$
   Donc $F \cap G = \mathrm{vect}(1, 1, 2, 2)$. Comme $\boxed{\text{le vecteur } (1, 1, 2, 2)}$ est libre (*i.e.* non nul) il forme donc une base de $F \cap G$; ainsi on a $\boxed{\dim F \cap G = 1.}$

Solution du problème 10.55

1. rang $= 2$;
2. rang $= 1$;
3. rang $= 1$;
4. rang $= 1$;
5. rang $= 0$;
6. rang $= 2$;
7. rang $= 3$;
8. rang $= 2$.

Solution du problème 10.56

1. rang $= \begin{cases} 2 & \text{si } m \notin \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
2. rang $= \begin{cases} 2 & \text{si } m \notin \{3, 1\} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
5. rang $= \begin{cases} 3 & \text{si } m \notin \{-2, 1\} \\ 2 & \text{si } m = -2 \\ 1 & \text{si } m = 1 \end{cases}$
6. rang $= \begin{cases} 3 & \text{si } m \neq 1 \text{ et } m \neq 2 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$
7. rang $= \begin{cases} 3 & \text{si } m \notin \{-1, 0, 1\} \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$

Solution du problème 10.57

1. Par le calcul.
2. Par le calcul on trouve que

$$e_4 = 2e_-e_2 - e_3,\ e_5 = e_1 + e_2 + e_3 \text{ et } e_6 = -e_1 - e_2 + 2e_3,$$

donc e_4, e_5, e_6 appartiennent à l'espace $\mathrm{vect}(e_1, e_2, e_3)$ donc (cf. proposition 10.1.12) on a :

$$\mathrm{vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6) = \mathrm{vect}(e_1, e_2, e_3)$$

Comme e_1, e_2, e_3 sont libres, ils forment une base de $\mathrm{vect}(e_1, e_2, e_3)$, donc de $\mathrm{vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$.

3. D'après la question précédente et la définition de la dimension on a :

$$\mathrm{rang}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6) = \dim \mathrm{vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6) = 3.$$

Solution du problème 10.59

1. **$v \in V$ si et seulement si (S) a une solution, au moins :**
En effet, comme V est le sous-espace vectoriel engendré par v_1, v_2, v_3, on sait que :

$$V = \{\, xv_1 + yv_2 + zv_3 \mid x, y, z \in \mathbb{R} \,\}.$$

Ainsi $v \in V$ si et seulement s'il existe (au moins) un triplet de réels (x, y, z) tel que :

$$(a, b, c) = v = xv_1 + yv_2 + zv_3.$$

Cette égalité s'écrit encore

$$(a, b, c) = x(1, 1, m) + y(2, m + 1, 2) + z(m, 1, 1) = (x + 2y + mz, x + (m + 1)y + z, mx + 2y + z).$$

L'égalité de ces deux triplets coordonnée par coordonnée est exactement le système (S).

2. **Résolution si $m = 1$:**
Dans ce cas, on a $v_1 = v_3 = \frac{1}{2}v_2 = (1, 1, 1)$. On en déduit immédiatement que $V = \mathrm{vect}(1, 1, 1) = \{\, (a, a, a) \mid a \in \mathbb{R} \,\}$; c'est une $\boxed{\text{droite vectorielle, de dimension 1.}}$ On en déduit que $v = (a, b, c)$ appartient à V, *i.e.* (S) admet des solutions, si et seulement si $\boxed{a = b = c}$; dans ce cas les trois équations de (S) sont identiques ; les solutions sont les $\boxed{(x, y, z) \text{ tels que } x + 2y + z = a.}$

3. **Résolution si $m \neq 1$:**

$$\begin{cases} x + 2y + mz = a & L_1 \\ x + (m + 1)y + z = b & L_2 \\ mx + 2y + z = c & L_3, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + mz = a & L_1 \\ (m - 1)y + (1 - m)z = b - a & L_2 - L_1 = L_2' \\ 2(1 - m)y + (1 - m^2)z = c - ma & L_3 - mL_1 = L_3', \end{cases}$$

Comme $m \neq 1$, on peut diviser par $m - 1$; le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x + 2y + mz = a & L_1 \\ y - z = \frac{b-a}{m-1} & \frac{1}{m-1}L_2' = L_2'' \\ 2y + (1 + m)z = \frac{c-ma}{1-m} & \frac{1}{1-m}L_3' = L_3'', \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+mz=a & L_1 \\ y-z=\frac{b-a}{m-1} & L_2'' \\ (3+m)z=\frac{c-ma+2(b-a)}{1-m} & L_3''-2L_2''=L_3'''. \end{cases}$$

On a alors deux possibilités :

– $\boxed{\text{Si } m=-3}$: l'équation L_3''' se réduit à $0=\frac{c+2b+a}{4}$; ainsi le système (S) admet des solutions si et seulement si $\boxed{a+2b+c=0}$

– $\boxed{m\neq 1 \text{ et } m\neq -3}$: on trouve une unique solution

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{c-ma+2(b-a)}{(1-m)(3+m)} & \text{d'après } L_3''' \\ y=z+\frac{b-a}{m-1}=\frac{c-ma+2(b-a)}{(1-m)(3+m)}+\frac{b-a}{m-1}=\frac{c+a-(m+1)b}{(1-m)(3+m)} & \text{d'après } L_2'' \\ x=a-(2y+mz)=a-2\frac{c+a-(m+1)b}{(1-m)(3+m)}-m\left(\frac{c-ma-2(b-a)}{(1-m)(3+m)}\right) & \text{d'après } L_1. \end{cases}$$

4. **Cas $m=-3$:**
On a montré à la question précédente que le système (S) a une solution si et seulement si $a+2b+c=0$. D'après la question 1, on sait que c'est une condition nécessaire et suffisante pour que v appartienne à V.

5. **dimension de V :**
On a vu aux question précédentes que :
– $\boxed{\text{Si } m=1}$ $V=\text{vect}(1,1,1)$ est une droite vectorielle, donc $\boxed{V \text{ est de dimension } 1.}$
– $\boxed{\text{Si } m=-3}$ le vecteur (a,b,c) appartient à V si et seulement si $a+2b+3b=0$; or cette équation est celle d'un hyperplan de $\mathbb{R}^2$; à ce titre, V est de dimension 1 de moins que $\mathbb{R}^3$ *i.e.* $\boxed{\dim V=2.}$
– $\boxed{\text{Si } m\neq 1 \text{ et } m\neq -3}$, on a vu que tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ s'écrit d'une et une seule manière comme combinaison linéaire des vecteurs v_1,v_2,v_3. Cela signifie que v_1,v_2,v_3 est une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi $V=\mathbb{R}^3$, donc $\boxed{\dim V=3.}$

6. **Valeurs de $m\in\mathbb{R}$ pour lesquelles v_1,v_2,v_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$:**
La caractérisation d'un base donnée juste avant montre non seulement que les m différents de 1 et -3 conviennent, mais aussi que $m=1$ et $m=-3$ ne conviennent pas. $\boxed{\text{Réponse : } m\in\mathbb{R}-\{1,-3\}.}$

7. **Coordonnées de $(4,2,1)$:**
Les coordonnées de $(4,2,1)$ sont les trois scalaires x,y,z tels que

$$(4,2,1)=xv_1+yv_2+zv_3.$$

Le calcul de la question 3, on l'on prend $m=0$ indique que $\boxed{z=-1,\ y=1,\ x=2.}$ A titre de vérification, on a bien :

$$(4,2,1)=2(1,1,0)+(2,1,2)-(0,1,1).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.60

$$\boxed{\text{rang}(e_1,e_2,e_3)=\begin{cases} 3 & \text{si } m\neq 0 \text{ et } m\neq 1 \\ 2 & \text{si } m=0 \\ 1 & \text{si } m=1 \end{cases}.}$$

Solution de l'exercice 10.64

1. $f \circ f = -\mathrm{Id}$.
2. $h \circ h = -\mathrm{Id}$.
3. Soient $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $tx + sh(x) = 0$; montrons que $s = t = 0$.
   En effet de l'égalité précédente on déduit :
   $$h(tx + sh(x)) = h(0),$$
   soit, d'après la linéarité de h :
   $$th(x) + sh(h(x)) = 0,$$
   soit, comme $h \circ h = -\mathrm{Id}$:
   $$th(x) - sx = 0.$$
   Ainsi on a :
   $$\begin{cases} tx + sh(x) & = & 0 \qquad L_1 \\ th(x) - sx & = & 0 \qquad L_2 \end{cases}$$
   Par calcul sur les lignes on a donc :
   $$(t^2 + s^2)x = 0 \qquad tL_1 - sL_2.$$
   Comme x est non nul on en déduit $t^2 + s^2 = 0$; comme s, t sont des nombres réels cela signifie que $s = t = 0$.

Solution de l'exercice 10.65

Après calculs on trouve :

a. dim = 3 b. dim = 3 c. dim = 3 d. dim = 2 e. dim = 3 f. dim = 2

Remarque : tous ces résultats sont une application directe du théorème du rang qui est au programme de BCPST2.

Solution de l'exercice 10.67

1. Par l'absurde si $f(u) = 0$, alors $f(f(f(u))) = 0$. Or c'est impossible car $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}$, donc $f(f(f(u))) = u \neq 0$.
2. Comme $f(u)$ est colinéaire à u il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = tu$. Alors on a :
   $$u = f(f(f(u))) = f(f(tu)) = f(tf(u)) = f(t^2u) = t^2f(u) = t^3u.$$
   Comme u n'est pas le vecteur nul on en déduit que $t^3 = 1$; comme t est un nombre réel on en déduit que $t = 1$. Et donc on a bien $f(u) = tu = u$.
3. Si v n'est pas colinéaire à u alors la famille u, v est libre dans $\mathbb{R}^2$; or $\boxed{\mathbb{R}^2 \text{ est de dimension } 2}$ donc u, v est un base de $\mathbb{R}^2$. En partciulier tout vecteur, par exemple $f(u)$, s'exprime comme combinaison linéaire de u et v.
4. Comme à la question, 2 on a :
   $$\begin{aligned} v &= f(f(f(v))) \\ &= f(f(av + bv)) \\ &= f(af(u) + bf(v)) \\ &= f(au + b(au + bv)) \\ &= f((a + ba)u + b^2) \\ &= (a + ba)u + b^2(au + bv) \\ &= (a + ba + b^2a)u + b^3v. \end{aligned}$$

Comme u, v est une base on en déduit que $a + ba + b^2 a = 0$ et $b^3 = 1$, d'où $a = 0$ et $b = 1$. Ainsi on a bien $f(v) = v$.

5. Comme u, v est une base de $\mathbb{R}^2$, tout vecteur w s'écrit de manière unique sous la forme $w = tu + sv$ avec $s, t \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$f(w) = f(su + tv) = sf(u) + tf(v) = su + tv = w.$$

Comme $f(w) = w$ pour tout w, on en déduit que $f = \mathrm{Id}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.70

1. $\dim F = \dim G = 2$ (plans vectoriels engendrés chacun par deux vecteurs libres).
2. Le calcul donne un système d'équation catésiennes de F, par exemple :

$$(a, b, c, d) \in F \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} d & = & 0 \\ -7a + 3b - 5c & = & 0 \end{array} \right.$$

Dès lors on vérifie aisément que $(3, 7, 0, 0), (5, 0, -7, 0) \in F$. Comme F est un sous-espace vectoriel et que $\mathrm{vect}((3, 7, 0, 0), (5, 0, -7, 0)) = G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ qui contient les vecteurs $(3, 7, 0, 0), (5, 0, -7, 0)$ on en déduit que G est inclus dans F (cf. proposition 10.3.2).

3. Comme G est inclus dans F et qu'ils ont la même dimension on en déduit que $\boxed{F = G}$ (cf. proposition 10.3.17).

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.71

Mêmes idées qu'à l'exercice 10.70. Comme les espaces proposés sont tous de dimension 2 soit ils sont égaux, soit aucun n'est inclus dans l'autre. On trouve :

1. $F = G$.
2. F n'est pas inclus dans G et G n'est pas inclus dans F.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.73

1. Le calcul donne :

$$\dim F = 3,\ \dim G = 2,\ \dim(F \cap G) = 1,\ \dim H = 4,$$

Donc **la relation à vérifier est fausse**. Elle devient vraie si on lit :

$$\dim F + \dim G = \dim H + \dim(F \cap G).$$

SOLUTION DU PROBLÈME 10.78

1. **Valeurs de α pour lesquelles la famille u_1, u_2, u_3 est libre, génératrice, une base :**

Comme la famille comporte trois vecteurs et que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 on sait que les trois propriétés (libre, génératrice, une base) sont équivalentes et il suffit de vérifier l'une d'elles. Examinons si c'est une base : soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $xu_1 + yu_2 + zu_3 = (a, b, c)$. Cette dernière équation équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{lllll} & y & +z & = a & L_1 \\ x & & +z & = b & L_2 \\ x & +\alpha y & & = c & L_3 \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{lllll} x & +z & & = b & L_2 \\ & z & +y & = a & L_1 \\ & & (\alpha+1)y & = a + c - b & L_1 + L_3 - L_2 \end{array} \right. .$$

On voit donc que le système a une seule solution si et seulement si $\alpha + 1 \neq 0$.

En conclusion la famille u_1, u_2, u_3 est libre, génératrice et une base si et seulement si $\boxed{\alpha \neq -1.}$

2. **Équation et dimension de vect$(e_1, e_2) \cap$ vect(u_1, u_3) :**

Déterminons une $\boxed{\text{équation cartésienne de vect}(e_1, e_2)}$ du type $ax + by + cz = 0$; comme e_1, e_2 sont dans le plan, les coefficients a, b, c doivent vérifier : $a = 0$ et $b = 0$. On trouve donc l'équation $\boxed{z = 0}$.

De même on calcule une $\boxed{\text{équation cartésienne de vect}(u_1, u_3)}$; les coefficients a, b, c doivent vérifier : $b + c = 0$ et $a + b = 0$. On trouve donc l'équation $\boxed{x - y + z = 0}$.

Comme les deux équations ne sont pas proportionnelles les plans ne sont pas confondus ; ils sont donc sécants ; $\boxed{\text{leur intersection est une droite vectorielle, de dimension 1,}}$ et d'équation cartésienne :

$$\boxed{\begin{cases} z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{cases}}$$

Autre méthode : on remarque que l'espace vect$(e_1, e_2) \cap$ vect(u_1, u_3) est de dimension au plus 2, car inclus dans le plan vectoriel vect(e_1, e_2). Si il était de dimension 2, d'après l'inclusion :

$$\text{vect}(u_1, u_3) \supset \text{vect}(e_1, e_2) \cap \text{vect}(u_1, u_3),$$

on aurait vect$(u_1, u_3) =$ vect(e_1, e_2) ce qui n'est pas possible car $u_2 \notin$ vect(e_1, e_2) ; la dimension est donc 0 ou 1. De plus $u_3 = e_1 + e_2$ donc

$$\text{vect}(u_3) \subset \text{vect}(e_1, e_2) \cap \text{vect}(u_1, u_3).$$

Pour des raisons de dimension cette inclusion est une égalité, soit :

$$\boxed{\text{vect}(e_1, e_2) \cap \text{vect}(u_1, u_3) = \text{vect}(u_3)}$$

3. **Noyau de f :**

D'après les valeurs de $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ la matrice de f dans la base canonique vaut :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Donc

$$(x, y, z) \in \ker f \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z &= 0 & L_1 \\ -x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z &= 0 & L_2 \\ x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z &= 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y + z &= 0 & 2L_1 = L_1' \\ 2x + y + z &= 0 & -2L_2 = L_2' \\ 2x + y - z &= 0 & 2L_3 = L_3' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z &= 0 & L_2' \\ -y + z &= 0 & L_1' \\ -2z &= 0 & L_3' - L_2' \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Donc $\boxed{\ker f = \{0\}, \text{ a une base vide, et est de dimension 0.}}$

4. **Rang de f :**

Comme le noyau de f est l'espace vectoriel $\{0\}$ (cf. question précédente)l'application f est injective. Or tout *endomorphisme* injectif est obligatoirement surjectif. Donc $\text{Im} f = \mathbb{R}^3$ *i.e.* $\boxed{\text{rang} f = 3.}$

Autre méthode (cf. cours de deuxième année) :

D'après $\boxed{\text{le théorème du rang :}}$

$$\text{rang} f + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 = 3,$$

donc $\boxed{\text{rang} f = 3.}$

5. **Vecteurs $f(u_1), f(u_2), f(u_3)$ en fonction de u_1, u_2, u_3 :**
On calcule :

$$M\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},\quad M\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad M\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Les calculs de la question 1 permettent d'exprimer tout vecteur (a, b, c) comme combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3 ; on trouve :

$$xu_1 + yu_2 + zu_3 = (a, b, c) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}(a+c-b)\\ z = \frac{1}{2}(a-c+b)\\ x = \frac{1}{2}(b-a+c)\end{cases}$$

D'où

$$\boxed{\begin{cases} f(u_1) = (0,-1,0) = \frac{1}{2}(-u_1+u_2-u_3)\\ f(u_2) = \frac{1}{2}(1,-3,1) = \frac{1}{4}(-3u_1+5u_2-3u_3)\\ f(u_3) = \frac{1}{2}(1,-3,3) = \frac{1}{4}(u_1+5u_2-7u_3)\end{cases}}$$

SOLUTION DU PROBLÈME 10.79

1. **(e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$:**
En effet, on a, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est donc génératrice. Elle est libre car :

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0),$$

et donc la seule combinaison linéaire de e_1, e_2, e_3 qui est nulle est la combinaison avec les coefficients tous nuls.

2. **f est linéaire :**
En effet, on a :

$$f(x,y,z) = (x+y+z)(e_1+e_2+e_3) = \begin{pmatrix}x+y+z\\x+y+z\\x+y+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

On reconnaît donc que f est l'application linéaire qui a pour matrice :

$$M = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

3. **f n'est pas surjective :**
En effet l'équation d'inconnue (x, y, z)

$$f(x, y, z) = (a, b, c)$$

n'a pas de solution si a, b et c ne sont pas tous égaux.

4. **f n'est pas injective :**
En effet l'application f est linéaire et son noyau n'est pas $\{(0,0,0)\}$ puisque, par exemple :
$$f(1,-1,0) = (0,0,0).$$

5. **Matrice de f :**
D'après le raisonnement de la question 2, on a :
$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

6. **Relation $M^{k+1} = 3^k M$:**
Montrons $\boxed{\text{par récurrence}}$ sur $k \geqslant 0$ la relation
$$M^{k+1} = 3^k M. \qquad (\mathcal{P}(k))$$
– $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $M^{0+1} = M = 3^0 M$.
– $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$: en effet
$$M^{k+2} = M^{k+1}M = 3^k M^2 = 3^{k+1}M,$$
puisque
$$\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3M.}$$

7. **Matrice de g :**
L'application g est l'application linéaire qui a pour matrice :
$$\boxed{N_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}.}$$

8. **Valeur m_0 telle que $f \circ g_{m_0} = g_{m_0} \circ f$:**
Comme f est l'application linéaire de matrice M et g_m l'application linéaire de matrice N_m, alors $f \circ g_m$ est l'application linéaire de matrice MN_m et $g_m \circ f$ est l'application linéaire de matrice $N_m M$. Ces deux application sont donc égales si et seulement si les matrices sont égales. Or :
$$MN_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1+m & 1+m \\ 0 & 1+m & 1+m \\ 0 & 1+m & 1+m \end{pmatrix}.$$
$$N_m M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1+m & 1+m & 1+m \\ 1+m & 1+m & 1+m \end{pmatrix}.$$
Il y a donc égalité si et seulement si m est égal à $\boxed{m_0 = -1}$; on remarquera d'ailleurs que dans ce cas :
$$\boxed{MN_{m_0} = N_{m_0}M = 0.}$$

9. **Calcul de $(f+g_{m_0})^{k+1}$:**

Comme $\boxed{MN_{m_0} = N_{m_0}M,}$ on peut appliquer $\boxed{\text{la formule du binôme}}$:

$$(M+N_{m_0})^{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1} C_{k+1}^p M^p N_{m_0}^{k+1-p}.$$

De plus on a remarqué que $\boxed{MN_{m_0} = N_{m_0}M = 0,}$ donc (on peut le montrer par récurrence sur p et q) tous les produits $M^p N_{m_0}^q$ sont nuls dès que $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, d'où :

$$(M+N_{m_0})^{k+1} = M^{k+1} + N_{m_0}^{k+1},$$

d'où l'égalité annoncée.

SOLUTION DU PROBLÈME 10.80

1. **Inversibilité et inverse de A : :**

La matrice A est inversible si et seulement si l'application linéaire associée f est bijective, c'est-à-dire que pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, l'équation :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

a une seule solution (x,y,z). En effectuant le calcul, cette équation s'écrit aussi :

$$\begin{cases} x-y+z=a \\ y=b \\ -y+2c=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=a \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Soit encore

$$\begin{cases} x-y+z=a \\ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \end{cases}.$$

D'où

$$z = \frac{1}{2}(b+c),\ y=b,\ x = a+y-z = a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c.$$

Le système a bien une unique solution donnée par : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$,

donc A est inversible et l'inverse est : $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$

2. **Base du noyau de g :**

Si on note $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}
u \in \ker g &\Leftrightarrow g(u) = 0\\
&\Leftrightarrow f(u) = u\\
&\Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -y+z=0\\ 0=0\\ -y+z=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow -y+z=0
\end{aligned}$$

Donc

$$\ker g = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -y+z=0 \right\} = \left\{ (x, y, y) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Comme $(x, y, y) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 1)$, on voit que $((1, 0, 0), (0, 1, 1))$ est une famille génératrice de $\ker g$; comme, par ailleurs, cette famille est libre puisque

$$(0, 0, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 1) = (x, y, y) \Rightarrow x = 0 \text{ et } y = 0,$$

on a que $\boxed{(e_1, e_2 - e_1) = ((1, 0, 0), (0, 1, 1)) \text{ est une base de } \ker g.}$

3. **Base de l'image de g :**
Le calcul donne

$$g(x, y, z) = (z - y, 0, z - y) = (z - y)(1, 0, 1).$$

Donc l'image de g est :

$$\operatorname{Im} g = \{ \lambda(1, 0, 1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

La famille à un seul vecteur $(1, 0, 1)$ est génératrice d'après le calcul de $\operatorname{Im} g$, et elle est clairement libre, donc $\boxed{e_3 = (1, 0, 1) \text{ est une base de } \operatorname{Im} g.}$

4. **(e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$:**
Il faut montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ il existe un seul triplet de réels $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tels que :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = (a, b, c)$$

soit

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = a & L_1\\ \lambda_1 + \lambda_2 = b & L_2\\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c & L_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = a & L_1\\ \lambda_1 + \lambda_2 = b & L_2\\ \lambda_1 = c - a & L_3' = L_3 - L_1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = c - a & L_3'\\ \lambda_2 = b - \lambda_1 = b - c + a & L_2\\ \lambda_3 = a - \lambda_2 = c - b & L_1\end{cases}$$

Donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ existent et sont uniques.

5. **Calcul de $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$:**
Par définition de l'application linéaire associée a une matrice, on a :

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = e_1,$$

$$f(e_2)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=e_2,$$

$$f(e_3)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=2e_3.$$

6. **Relation $(f\circ f)(u)=3f(u)-2u$:**
En effet, pour tout $u\in\mathbb{R}^3$, comme (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ d'après la question précédente, il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que :
$$u=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3.$$
En utilisant la linéarité de f, on calcule alors :
$$\begin{array}{rcl} f(u) &=& f(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3)\\ &=& \lambda_1f(e_1)+\lambda_2f(e_2)+\lambda_3f(e_3)\\ &=& \lambda_1e_1+\lambda_2e_2+2\lambda_3e_3.\\ f(f(u)) &=& f(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+2\lambda_3e_3)\\ &=& \lambda_1f(e_1)+\lambda_2f(e_2)+2\lambda_3f(e_3)\\ &=& \lambda_1e_1+\lambda_2e_2+4\lambda_3e_3.\\ 3f(u)-2u &=& 3(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+2\lambda_3e_3)-2(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3)\\ &=& \lambda_1e_1+\lambda_2e_2+4\lambda_3e_3. \end{array}$$
On constate donc bien que $\boxed{f(f(u))=3f(u)-2u, \text{ pour tout } u.}$

7. **Relation entre f^n, f et $id_{\mathbb{R}^3}$. :**
Montrons par récurrence sur $n\geqslant 1$ la relation $\mathcal{P}(n)$ suivante :
$$\forall u\in\mathbb{R}^3,\ f^n(u)=(2^n-1)f(u)+(2-2^n)u.$$
– $\mathcal{P}(1)$ est vraie car on a : $f(u)=(2^1-1)f(u)+(2-2^1)u$.
– $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$: En effet
$$\begin{array}{rcll} f^{n+1}(u) &=& f(f^n(u)) & \text{par définition de la composition}\\ &=& f\left((2^n-1)f(u)+(2-2^n)u\right) & \text{d'après l'hypothèse}\mathcal{P}(n)\\ &=& (2^n-1)f(f(u))+(2-2^n)f(u) & \text{linéarité de } f\\ &=& (2^n-1)(3f(u)-2u)+(2-2^n)f(u) & \text{d'après la question précédente}\\ &=& (3(2^n-1)+(2-2^n))f(u)-2(2^n-1)u & \\ &=& (2.2^n-1)f(u)+(2-2^{n+1})u & \\ &=& (2^{n+1}-1)f(u)+(2-2^{n+1})u & \end{array}$$
Donc on a montré $\mathcal{P}(n+1)$.

Solutions des exercices du chapitre 11

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.1

1. $(A_1 \cup A_2) \cap \overline{A_3}$.
2. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.
3. $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}$; ou bien : $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$.
4. $\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right) \cup \cdots \cup \left(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n\right)$.
5. $A_1 \subset \overline{A_2}$.
6. $A_1 \cap \overline{A_2} \subset \overline{A_3}$.
7. $A_1 \subset A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap \overline{A_n}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.2

1. Faux.
2. Vrai.

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.3

On modélise l'expérience aléatoire en prenant comme univers l'ensemble des boules muni de la probabilité uniforme. Le nombre total de boules est alors :

$$|\Omega| = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On en déduit que :

1. $p_i = \dfrac{2i}{n(n+1)}$.
2. La probabilité recherchée est :

$$p_{m+1}+\cdots+p_n = \frac{2}{n(n+1)}((m+1)+\cdots+n) = \frac{2}{n(n+1)}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2}\right) = 1 - \frac{m+1}{2(2m+1)}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.4

1. On trouve :

$$E = \{1,3,5\}^2 \cup \{2,4,6\}^2\ ,\ F = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(1,3),(2,3),(4,3),(5,3),(6,3)\}$$

$$\text{et } E \cap F = \{(3,1),(3,3),(3,5),(1,3),(5,3)\}.$$

Comme la probabilité est uniforme, la probabilité de tout évènement A est donnée par :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \qquad \text{avec ici } |\Omega| = 36.$$

Donc

$$\boxed{P(E) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},\quad P(F) = \frac{11}{36} \qquad \text{et} \qquad P(E \cap F) = \frac{5}{36}.}$$

2. D'après la formule de Poincaré on a :

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}.$$

D'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(E\cap\overline{F})+P(E\cap F)=P(E),$$

donc

$$P(E\cap\overline{F})=P(E)-P(E\cap F)=\frac{13}{36}.$$

Comme les évènements $E\cap\overline{F}$ et $\overline{E}$ sont incompatibles, on a;

$$P((E\cap\overline{F})\cup\overline{E})=P((E\cap\overline{F}))+P(\overline{E})=P((E\cap\overline{F}))+1-P(E)=\frac{31}{36}.$$

Solution de l'exercice 11.6

1. D'après la formule de Poincaré, on a :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)=\frac{26}{18}-p.$$

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(C-(B\cup A))=P(A\cup B\cup C)-P(A\cup B)=\frac{8}{18}-p,$$

puisque $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

2. Comme toute probabilité est un nombre réel entre 0 et 1, on déduit de la question précédente que :

$$0\leqslant\frac{26}{18}-p\leqslant 1 \text{ et } 0\leqslant\frac{8}{18}-p\leqslant 1,$$

soit :

$$\frac{8}{18}\leqslant p\leqslant\frac{26}{18} \text{ et } -\frac{8}{18}\leqslant p\leqslant\frac{8}{18}.$$

Donc forcément $\boxed{p=\frac{8}{18}.}$

Solution de l'exercice 11.7

Remarque : attention de ne pas utiliser l'équivalence suivante **qui est fausse** :

$$A=B\Leftrightarrow P(A)=P(B).$$

1. **On a $d(A,B)=0$ si et seulement si $A=B$:**
D'après la formule de Poincaré on a :

$$d(A,B)=P(A\cup B)-P(A\cap B).$$

Comme $A\cap B$ est inclus dans $A\cup B$, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$d(A,B)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=P((A\cup B)-(A\cap B)).$$

Ainsi, d'après la propriété vérifiée par P on a :

$$d(A,B)=0\Leftrightarrow(A\cup B)-(A\cap B)=\emptyset,$$

et il n'est pas très difficile de montrer que cette dernière conditions n'est possible que si $A=B$.

2. **Inégalité $d(A,B) + d(B,C) \geqslant d(A,C)$:**
Cette inégalité est équivalente à :

$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) + P(B) + P(C) - 2P(B \cap C) \geqslant P(A) + P(C) - 2P(A \cap C),$$

soit encore :

$$2P(B) + 2P(A \cap C) \geqslant 2P(A \cap B) + 2P(B \cap C),$$

soit encore :

$$P(B) + P(A \cap C) \geqslant P(A \cap B) + P(B \cap C).$$

Un petit dessin comme celui de la page 10 (chapitre 1) suggère d'utiliser la formule de Poincaré :

$$P[(A \cap B) \cup (B \cap C)] = P(A \cap B) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C),$$
$$P[B \cup (A \cap C)] = P(B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C).$$

Ainsi la formule à montrer se ramène à :

$$P[B \cup (A \cap C)] \geqslant P[(A \cap B) \cup (B \cap C)].$$

Or cette dernière est évidente, par croissance de P puisque :

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \subset B \cup (A \cap C).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.9

1. **Si $x, y \in [0,1]$ et $x + y \leqslant 1$ alors $xy \leqslant \frac{1}{4}$:**
En effet on a comme $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$, par produit par $x \geqslant 0$ on déduit que :

$$0 \leqslant xy \leqslant x(1-x).$$

Or :

$$x(1-x) - \frac{1}{4} = -x^2 + x - \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0.$$

Donc :

$$0 \leqslant xy \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}.$$

2. **Si $a, b, c, d \in [0,1]$ et $a + b + c + d = 1$, alors $-\frac{1}{4} \leqslant ad - bc \leqslant \frac{1}{4}$:**
Dans les conditions indiquées on a $a + d \leqslant 1$ et $b + d \leqslant 1$, donc d'après la question 1 on a :

$$0 \leqslant ad \leqslant \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant bc \leqslant \frac{1}{4}.$$

Donc on a :

$$0 \leqslant ad \leqslant \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad 0 \geqslant -bc \geqslant -\frac{1}{4},$$

d'où le résultat en sommant ces deux inégalités.

3. **Relation $\Delta = ad - bc$:**
D'après la formule des probabilités totales on a :

$$a + b = P(A \cap B) + P(\overline{B} \cap A) = P(A)$$
$$a + c = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(B).$$

Donc :

$$\Delta = a - (a+b)(a+c) = a - a^2 - ab - ac - bc = a(1 - a - b - c) - bc.$$

Or, daprès la formule des probabilités totales on a aussi :

$$c + d = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{B} \cap \overline{A}) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - (a+b).$$

Donc $1 - a - b - c = d$ et donc $\Delta = ad - bc$.

4. **Conclusion :**
Les nombres a, b, c, d définis à la question 3 appartiennent tous à l'intervalle $[0, 1]$ car ce sont des probabilités. Leur somme vaut 1, comme cela a été démontré au cours de la question 3. Donc d'après la question 2 ils vérifient l'inégalité :

$$-\frac{1}{4} \leqslant ad - bc \leqslant \frac{1}{4},$$

qui d'après la question 3 est l'inégalité que l'on veut montrer.

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.11

1. La probabilité recherchée est $1 - (1-p)^n$ avec $p = \dfrac{1}{100}$.
2. Le nombre de tirage n recherché doit vérifier :

$$1 - (1-p)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow (1-p)^n \leqslant 0,01 \Leftrightarrow n \ln(1-p) \leqslant \ln 0,01,$$

soit :

$$n \geqslant \frac{\ln 0,01}{\ln(1-p)} \simeq 458.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.14

Le résultat de quatre lancers successifs d'un dé peut être modélisé par l'univers :

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}^4 .$$

On suppose que les dés ne sont pas pipés, et on munit donc Ω de la probabilité uniforme P. L'événement "obtenir un six" (au moins) est le contraire de l'événement "ne pas obtenir de six" qui est

$$A = \{1, \ldots, 5\}^4 .$$

Ainsi la probabilité d'obtenir un six est

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{5^4}{6^4} = \frac{671}{1296} \simeq 51,77\%.$$

Le résultat de vingt-quatre lancers successifs de deux dés peut être modélisé par l'univers :

$$\Omega' = (\{1, 2, \ldots, 6\} \times \{1, 2, \ldots, 6\})^{24}.$$

On suppose que les dés ne sont pas pipés, et on munit donc Ω' de la probabilité uniforme P'. L'événement "obtenir un double six" (au moins) est le contraire de l'événement "ne pas obtenir de double six" qui est

$$A' = (\{1, \ldots, 6\}^2 - \{(6, 6)\})^{24}.$$

Ainsi la probabilité d'obtenir un double six est

$$P(\overline{A'}) = 1 - P(A') = 1 - \frac{|A'|}{|\Omega'|} = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \simeq 49,14\%.$$

En conclusion $\boxed{\text{il est plus probable d'obtenir un six en 4 lancers qu'un double six en 24 lancers.}}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.16

La probabilité recherchée est :

$$p = 30\% \times \frac{m}{n} + 15\% \times \frac{n-m}{n} + 35\% = 0,5 + 0,15\frac{m}{n}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.17

Soit B_n l'évènement « il faut beau temps le jour n ». D'après l'énoncé on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(B_n) = p.$$

De plus on a :

$$P(B_{n+1}|B_n) = 80\%, \quad P(\overline{B_{n+1}}|\overline{B_n})40\%.$$

D'après $\boxed{\text{la formule des probabilités totales}}$ on a :

$$P(B_{n+1}) = P(B_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(B_{n+1}|\overline{B_n})P(\overline{B_n}),$$

donc

$$\begin{aligned} p &= P(B_{n+1}) \\ &= P(B_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(B_{n+1}|\overline{B_n})P(\overline{B_n}) \\ &= P(B_{n+1}|B_n)P(B_n) + (1 - P(\overline{B_{n+1}}|\overline{B_n}))(1 - P(B_n)) \\ &= 80\% \times p + 60\% \times (1-p) \\ &= 20\% \times p + 60\% \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{p = 75\%.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.18

1. La probabilité que le jeu s'arrête en moins de vingt lancers est $\boxed{P_0 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{20} \simeq 97,39\%.}$

2. Si on numérote les lancers de 1 à 20, le premier joueur n'affectue que les lancers de numéro impair 1,3,5,...,19. Or la probabilité qu'un joueur gagne au k-ième lancer (après $k-1$ lancers sans vainqueur) est :

$$p_k = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}.$$

Donc la probabilité P_1 que le premier joueur gagne en moins de 20 lancers est :

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1 + p_3 + \cdots + p_{19} \\ &= \sum_{k=1}^{10} p_{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k-1}\frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{10}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^k \\ &= \frac{1}{5}\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^{22}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} \end{aligned}$$

Donc cette probabilité est :

$$\boxed{P_1 = \frac{1}{5}\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^{22}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} \simeq 67,28\%.}$$

La probabilité que le deuxième joueur gagne en moins de 20 lancers est alors $\boxed{P_2 = P_0 - P_1 \simeq 30,1\%.}$

Solution de l'exercice 11.20

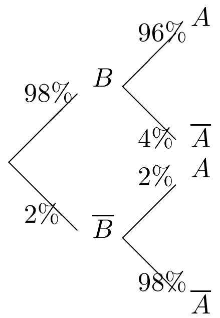
On trouve des probabilités de vote pour chacun des candidats au second tour qui sont :

$$P(A_2) = 48,5\% \text{ et } P(B_2) = 46,4\%.$$

Solution de l'exercice 11.21

1. Soient les évènements B « la pièce fabriquée est bonne » et A « la pièce est acceptée ». D'après l'énoncé on a :

$$P(\overline{B}) = 2\%, \quad P(A|B) = 96\% \qquad \text{et} \qquad P(\overline{A}|\overline{B}) = 98\%.$$



2. (a) La probabilité qu'il y ait une erreur est :

$$P[(B \cap \overline{A}) \cup (\overline{B} \cap A)] = P(\overline{A}|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B}) \simeq 3.96\%$$

   (b) La probabilité qu'une pièce soit refusée est d'après formule des probabilités totales :

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}|B)P(B) + P(\overline{A}|\overline{B})P(\overline{B}) \simeq 5,88\%.$$

   (c) La probabilité qu'une pièce soit bonne sachant qu'elle est refusée est d'après la formule de Bayes :

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}|B)P(B)}{P(\overline{A})} \simeq 33,33\%$$

   (d) La probabilité qu'une pièce soit mauvaise sachant qu'elle est acceptée est d'après la formule de Bayes :

$$P(\overline{B}|A) = \frac{P(A|\overline{B})P(\overline{B})}{1 - P(\overline{A})} \simeq 0,04\%.$$

Solution de l'exercice 11.26

On trouve approximativement :

1. Probabilité qu'un élève de sa classe réussisse au concours : 50,5%.
2. Probabilité qu'un élève n'ait pas travaillé du tout, sachant qu'il a réussi au concours : 2,97%.

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.27

1. **Probabilité que le contrebandier soit arrêté lors d'un passage :**
   Notons A l'événement : "il transporte de l'alcool" et C l'événement : "il transporte des cigarette". Soit E l'événement : "il est arrêté". D'après l'énoncé on a :

   $$P(A) = p,\ P(C) = 1 - p,\ P(E|A) = p_1,\ P(E|C) = p_2$$

   D'après $\boxed{\text{la formule des probabilités totales}}$ la probabilité d'être arrêté est :

   $$\boxed{P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|C)P(C) = pp_1 + (1-p)p_2.}$$

2. **Probabilité qu'il ait des cigarettes sachant qu'il vient d'être pris :**
   C'est la probabilité $P(C|E)$. On la calcule au moyen de $\boxed{\text{la formule de probabilité des causes :}}$

   $$\boxed{P(C|E) = \frac{P(E|C)P(C)}{P(E)} = \frac{(1-p)p_2}{pp_1 + (1-p)p_2}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.28

On modélise par $\Omega = \{f, g\}^2$ muni de la probabilité uniforme.

1. On trouve : 50%.
2. On trouve : $\frac{2}{3}$.
   Commentaire : le fait d'avoir une fille n'indique pas si elle est est l'aînée ou la cadette, ce qui explique la différence avec le résultat de la question 1.
3. On modélise par $\Omega' = \{f, g\}^2 \times \{\text{aîné}, \text{cadet}\}$ selon que c'est l'aîné ou le cadet qui répond au téléphone, muni de la probabilité uniforme. On trouve 50%.
4. On prend l'espace Ω' mais la probabilité n'est plus uniforme. On trouve

   $$\frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{4}{7}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.29

La probabilité recherchée est :

$$\boxed{\frac{p}{p + \frac{1}{2}(1-p)} = \frac{2p}{p+1}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.30

Notons V l'événement "le taxi qui a provoqué l'accident était vert" ; son contraire est alors $\overline{V}$: "le taxi qui a provoqué l'accident était bleu" ; et on a $P(V) = 0,15$, $P(\overline{V}) = 0,85$. Notons T l'événement "le témoin a cru voir un taxi vert" ; son contraire est alors l'événement $\overline{T}$: "le témoin a cru voir un taxi bleu". Le témoin n'est fiable qu'à 70%, ce qui signifie que, sachant que la taxi était vert, la probabilité que le témoin l'ai vu vert est de 70%, à savoir $P(T|V) = 0,7$; on en déduit que $P(\overline{T}|V) = 0,3$. Et de même , sachant que la taxi était bleu, la probabilité que le témoin l'ai vu bleu est de 70%, à savoir $P(\overline{T}|\overline{V}) = 0,7$; on en déduit que $P(T|\overline{V}) = 0,3$.

La probabilité que le taxi soit bleu, sachant que le témoin l'a vu vert est alors $P(\overline{V}|T)$, soit, d'après la $\boxed{\text{formule de Bayes}}$ dans sa forme utilisant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(\overline{V}|T) &= \frac{P(T|\overline{V})P(\overline{V})}{P(T)} \\ &= \frac{P(T|\overline{V})P(\overline{V})}{P(T|\overline{V})P(\overline{V}) + P(T|V)P(V)} \\ &= \frac{0,3 \times 0,85}{0,3 \times 0,85 + 0,7 \times 0,15} \\ &= \frac{17}{24} \simeq 70,83\% \end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.32

1. $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$;
2. $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$;
3. $P(A \cup B|A \cap B) = 1$;
4. $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(B)}$;
5. $P(\overline{A \cup B}|B) = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.32

1. La probabilité conditionnelle $P(A|A \cup B)$ est bien définie lorque $P(A \cup B) \neq 0$. Or, comme $B \subset A \cup B$, on a :
$$P(A \cup B) \geqslant P(B) > 0.$$
2. L'inégalité $P(A|A \cup B) \geqslant P(A)$ est équivalente à :
$$\frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} \geqslant P(A),$$
Comme $A \cap (A \cup B) = A$ elle s'écrit encore :
$$P(A) \geqslant P(A \cup B)P(A).$$
Elle est donc vraie car $P(A) \geqslant 0$ et $P(A \cup B) \in [0, 1]$.
3. L'inégalité $P(A|A \cup B) \geqslant P(A)$ est équivalente à :
$$\frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} \geqslant \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$
soit :
$$P(A)P(B) \geqslant P(A \cap B)P(A \cup B).$$
D'après la formule de Poincaré on a :
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$
donc l'inégalité à montrer est :
$$P(A)P(B) \geqslant P(A \cap B)(P(A) + P(B) - P(A \cap B)),$$
soit :
$$P(A)P(B) - P(A \cap B)P(A) - P(A \cap B)P(B) + (P(A \cap B))^2 \geqslant 0,$$
soit :
$$(P(A) - P(A \cap B))(P(B) - P(A \cap B)) \geqslant 0,$$
qui est vraie car $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.

Solution de l'exercice 11.34

On modélise l'expérience aléatoire par l'univers $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ muni de la probabailité uniforme. Alors :

- l'évènement « avoir un résultat multiple de 3 » est $A = \{3, 6\}$ de probabilité : $P(A) = \dfrac{2}{6}$.
- l'évènement « avoir un résultat multiple de 2 » est $B = \{2, 4, 6\}$ de probabilité : $P(B) = \dfrac{3}{6}$.
- leur conjonction est l'évènement $A \cap B = \{6\}$ de probabilité : $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$.

On constate alors que $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{6} \times \dfrac{3}{6} = P(A)P(B)$, donc les évènements A et B sont indépendants.

Solution de l'exercice 11.36

On choisit une meule au hasard. Notons les événements suivants :

T	trop ou pas assez de trous	$P(T) = 0,01$
L	présence de lystéria	$P(L) = 0,02$
D	présence de dioxine	$P(D) = 0,012$

L'événement "elle présente l'un de ces défaut (au moins)" est alors la réunion $T \cup L \cup D$; sa probabilité est :

$$P(T \cup L \cup D) = P(T) + P(L) + P(D) - P(T \cap L) - P(T \cap D) - P(L \cap D) + P(T \cap L \cap D),$$

d'après la $\boxed{\text{formule de Poincaré}}$. Par ailleurs comme l'énoncé indique que les trois événements T, L, D sont indépendants, on a :

$$P(T\cap L) = P(T)P(L),\ P(T\cap D) = P(T)P(D),\ P(L\cap D) = P(L)P(D),\ P(T\cap L\cap D) = P(T)P(L)P(D).$$

Donc finalement

$$\boxed{P(T \cup L \cup D) = P(T) + P(L) + P(D) - P(T)P(L) - P(T)P(D) - P(L)P(D) + P(T)P(L)P(D) = 4,14\%}$$

Autre méthode :

$$P(T \cup L \cup D) = 1 - P(\overline{T \cup L \cup D}) = 1 - P(\overline{T} \cap \overline{L} \cap \overline{D})$$

Comme les événements $\overline{T}, \overline{L}$ et $\overline{D}$ sont indépendants, on obtient :

$$\boxed{P(T \cup L \cup D) = 1 - (1 - P(T))(1 - P(L))(1 - P(D)).}$$

Solution de l'exercice 11.38

1. **Si $P(A|B) \geqslant P(A)$ alors $P(B|A) \geqslant P(B)$:**
   En effet $P(A|B) \geqslant P(A)$ signifie :
   $$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}) \geqslant P(A),$$
   soit encore, en multipliant par $P(B) > 0$:
   $$P(A \cap B) \geqslant P(A)P(B),$$
   soit encore, en divisant par $P(A) > 0$:
   $$\frac{P(A \cap B)}{P(A)}) \geqslant P(B),$$
   c'est-à-dire $\boxed{P(B|A) \geqslant P(B).}$

2. **Si $P(B|A) = P(B|\overline{A})$ alors A et B sont indépendants :**
En effet $P(B|A) = P(B|\overline{A})$ signifie :

$$\begin{aligned} &\frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B\cap \overline{A})}{P(\overline{A})} \\ \Leftrightarrow\quad & P(A\cap B)P(\overline{A}) + P(B\cap \overline{A})P(A) \end{aligned}$$

Comme on sait que

$$P(B\cap \overline{A}) = P(B) - P(A\cap B),$$

cette relation s'écrit encore :

$$P(A\cap B)(1-P(A)) = (P(B) - P(A\cap B))P(A),$$

En développant et simplifiant il vient

$$P(A\cap B) = P(A)P(B),$$

c'est-à-dire que $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants.}}$
Autre méthode :
D'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) = P(B|A)(P(A) + P(\overline{A})) = P(B|A),$$

d'après l'hypothèse. Ainsi B est indépendant de A.

3. **Relation $P(A\cup B) = 1 - P(\overline{A}) + P(\overline{A})P(B)$:**
comme l'événement contraire de $A\cup B$ est $\overline{A}\cap\overline{B}$ on a :

$$P(A\cup B) = 1 - P(\overline{A}\cap\overline{B}).$$

De plus on sait que si A et B sont indépendants, il en est de même de $\overline{A}$ et $\overline{B}$, d'où :

$$P(A\cup B) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

Comme $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$, on déduit bien : $\boxed{P(A\cup B) = 1 - P(\overline{A}) + P(\overline{A})P(B).}$

Solution de l'exercice 11.40

Notons U_A (resp. U_B, resp. U_c) l'évènement « l'urne A (resp. l'urne B, resp. l'urne C) est choisie; comme le choix est effecté au hasard, on a :

$$P(U_A) = P(U_B) = P(U_C) = \frac{1}{3}.$$

Notons M l'évènement « les deux boules tirées sont de la même couleur ». Remarquons que si l'urne où l'on effectue le tirage contient une proportion p de boules blanches ($p = \frac{3}{5}$ pour l'urne A, $p = \frac{8}{12}$ pour l'urne B, $p = \frac{1}{6}$ pour l'urne C) alors la probabilité de tirer (avec remise) deux boules de même couleur est $p^2 + (1-p)^2$.

D'après la formule de probabilité des causes on a :

$$P(U_A|M) = \frac{P(M|U_A)P(U_A)}{P(M|U_A)P(U_A) + P(M|U_B)P(U_B) + P(M|U_C)P(U_C)},$$

soit :

$$\boxed{P(U_A|M) = \frac{\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2\right)\times\frac{1}{3}}{\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2\right)\times\frac{1}{3} + \left(\left(\frac{8}{12}\right)^2 + \left(\frac{4}{12}\right)^2\right)\times\frac{1}{3} + \left(\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right)\times\frac{1}{3}} \simeq 28,92\%}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.42

1. Probabilité qu'ils soient tous corrects :

$$\frac{90}{100} \times \frac{89}{99} \times \cdots \times \frac{81}{91} = \frac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}}.$$

2. Probabilité que le premier soit défectueux et les autres corrects :

$$\frac{10}{100} \times \frac{90}{99} \times \cdots \times \frac{82}{91} = 10\frac{A_{90}^{9}}{A_{100}^{10}} = \frac{C_{90}^{9}}{C_{100}^{10}}.$$

n.b. : on trouverait $\dfrac{C_{90}^{9}C_{10}^{1}}{C_{100}^{10}}$ si on demandait qu'un écrou (pas nécessairement le premier) soit défectueux et les autres bons.

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.44

1. Probabilité que les deux chaussures soient de la même couleur : $\dfrac{132}{380}$.
2. Probabilité qu'il ait trouvé une chaussure droite et une gauche : $\dfrac{10}{19}$.
3. Probabilité qu'il ait trouvé une vraie paire de chaussures : $\dfrac{1}{19}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.45

Notons B_i et U_j les évènements "la i-ème boule tirée est blanche" et "la j-ème urne a été choisie.

1. La formule des probabilités totales donne :

$$P(B_1) = P(B_1|U_1)P(U_1) + \cdots + P(B_1|U_n)P(U_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

2. La formule des probabilités totales donne de même :

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1 \cap B_2|U_1)P(U_1) + \cdots + P(B_1 \cap B_2|U_n)P(U_n).$$

Or, pour un tirage avec remise on a :

$$P(B_1 \cap B_2|U_k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2,$$

d'où :

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2) &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

3. Pour un tirage sans remise on a par contre :

$$P(B_1 \cap B_2|U_k) = \frac{k}{n} \times \frac{k-1}{n-1},$$

d'où :

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2) &= \frac{1}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \\ &= \frac{1}{n^2(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \right) \\ &= \frac{1}{n^2(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{n+1}{3n}. \end{aligned}$$

SOLUTION DU PROBLÈME 11.61

1. **Relation** $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) C_{n-1}^k = (n+1)2^{n-2}$. **:**

   En appliquant la première formule rappelée précédemment, mais avec $n-1$ à la place de n, on a :

   $$\sum_{k=0}^{n-1} k C_{n-1}^k = (n-1)2^{n-2}.$$

   Et la deuxième formule rappelée, pour $n-1$ donne :

   $$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k = 2^{n-1}.$$

   On a donc :

   $$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) C_{n-1}^k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k C_{n-1}^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \right) = (n-1)2^{n-2} + 2^{n-1} = 2^{n-2}((n-1)+2) = (n+1)2^{n-2}.$$

2. **Relation** $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$. **:**

   Pour tout k entre 0 et n, on a :

   $$\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!(k!(k+1))} = \frac{n!}{((n+1)-(k+1))!(k+1)!} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}.$$

   On a donc :

   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{p=1}^{n+1} C_{n+1}^p,$$

   en faisant le changement d'indice $p = k+1$. Or, on a :

   $$2^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p = C_{n+1}^0 + \sum_{p=1}^{n+1} C_{n+1}^p,$$

   soit

   $$\sum_{p=1}^{n+1} C_{n+1}^p = 2^{n+1} - 1,$$

   d'où le résultat annoncé.

3. **Valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{kC_n^k}{k+1}$:**

   On a :
   $$\frac{k}{k+1} = \frac{(k+1)-1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1},$$
   d'où
   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{kC_n^k}{k+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}\right) = 2^n - \left(\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\right).$$
   On a donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{kC_n^k}{k+1} = 2^n - \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.}$

4. **Nombre d'auditoires différents :**

   Un auditoire est une partie de l'ensemble des invités qui comporte 30 éléments. Il y a 2^{30} parties différentes dans un ensemble à 30 éléments ; il y a donc $\boxed{2^{30} \text{ auditoires différents possibles.}}$

5. **Calcul de la probabilité p_1 :**

   L'univers Ω de tous les auditoires possibles (on a vu que Ω a 2^{30} éléments) est muni d'une probabilité qui n'est pas uniforme :

Il y a un seul auditoire	de 1 personne	de probabilité $p_0 = 0 \times p_1 = 0$
Il y a 30 auditoires	d'une personnes	chacun de probabilité p_1
Il y a C_{30}^2 auditoires	de deux personnes	chacun de probabilité $p_2 = 2p_1$
	$\vdots$	
Il y a C_{30}^k auditoires	de k personnes	chacun de probabilité $p_k = kp_1$
	$\vdots$	
Il y a $1 = C_{30}^{30}$ auditoire	de 30 personnes	de probabilité $p_{30} = 30p_1$

   Le total des probabilités de tous ces auditoires est $1 = 100\%$, soit :
   $$1 = \sum_{k=0}^{30} (C_{30}^k(kp_1)) = p_1 \sum_{k=0}^{30} kC_{30}^k = p_1(30 \times 2^{29}),$$
   d'après la première formule rappelée au début de l'énoncé (en prenant $n = 30$). On déduit donc $\boxed{p_1 = \dfrac{1}{30 \times 2^{29}}.}$

6. **Probabilité que Monsieur B soit bien là :**

   C'est la probabilité de tous les auditoires où figure ce monsieur. Ces auditoires sont ceux composés, outre Monsieur B, d'une partie, vide ou non, de l'ensemble des 29 autres professeurs de physique invité. Cela se décompose donc en :

Il y a un seul auditoire	avec M. B et zéro autre personne	de probabilité p_1
Il y a 29 auditoires	avec M. B et une autre personne	chacun de probabilité $p_2 = 2p_1$
Il y a C_{29}^2 auditoires	avec M. B et deux autres personnes	chacun de probabilité $p_3 = 3p_1$
	$\vdots$	
Il y a C_{29}^k auditoires	avec M. B et k autres personnes	chacun de probabilité $p_{k+1} = (k+1)p_1$
	$\vdots$	
Il y a $1 = C_{29}^{29}$ auditoire	avec M. B et 29 autres personnes	de probabilité $p_{30} = 30p_1$

La probabilité recherchée est donc la somme :

$$\sum_{k=0}^{29} C_{29}^k p_{k+1} = p_1 \sum_{k=0}^{29} (k+1) C_{29}^k = p_1 31 \times 2^{28},$$

d'après le résultat de la question 1. La probabilité que M. B puisse venir est donc $\boxed{\dfrac{31 \times 2^{28}}{30 \times 2^{29}} = \dfrac{31}{60}.}$

7. **Probabilité que je reste debout :**
La probabilité que je reste debout, *sachant* que l'auditoire qui viendra comporte k personnes, est $\frac{1}{k+1}$. Par conditionnement en chaîne, la probabilité que l'auditoire qui vienne comporte k personnes *et* que je reste debout est donc

$$C_{30}^k p_k \frac{1}{k+1} = p_1 \frac{k C_{30}^k}{k+1}.$$

D'après la formule des probabilités totales, la probabilité de rester debout est donc

$$p_d = p_1 \sum_{k=0}^{30} \frac{k C_{30}^k}{k+1} = \frac{1}{30 \times 2^{29}} \left(2^{30} - \frac{2^{31} - 1}{31} \right),$$

d'après le résultat de la question 3. On a donc $\boxed{p_d = \frac{1}{15} - \frac{4 - 2^{-29}}{30 \times 31} \simeq 6,24\%.}$

SOLUTION DU PROBLÈME 11.62

1. **Probabilité p_1 :**
Soit A_1 (resp. A_2) l'événement “le premier tirage se fait dans U_1 (resp. U_2)”. Alors par hypothèse :

$$p(A_1) = p(A_2) = \frac{1}{2}.$$

Si B est l'événement “la première boule tirée est blanche”, alors d'après la formule des probabilités totales :

$$p_1 = p(B) = p(B|A_1)p(A_1) + p(B|A_2)p(A_2).$$

Or $p(B|A_1)$ représente la probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne U_1 ; comme toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées (probabilité uniforme) on a donc :

$$p(B|A_1) = \frac{b_1}{n_1 + b_1}$$

Et de même :

$$p(B|A_2) = \frac{b_2}{n_2 + b_2}.$$

On déduit finalement $\boxed{p_1 = \dfrac{1}{2} \dfrac{b_1}{n_1 + b_1} + \dfrac{1}{2} \dfrac{b_2}{n_2 + b_2}.}$

2. **Probabilité qu'une boule noire provienne de U_1 :**
Soit N est l'événement “la première boule tirée est noire”. Avec les notations de la question précédente, la probabilité recherchée est donc $p(A_1|N)$. On applique alors la formule de Bayes :

$$p(A_1|N) = \frac{p(N|A_1)p(A_1)}{p(N)}.$$

D'après la question précédente, comme les événements B et N sont contraires l'un de l'autre, on a :

$$p(N|A_1) = 1 - p(B|A_1) = 1 - \frac{b_1}{n_1 + b_1} = \frac{n_1}{n_1 + b_1},$$

$$p(N) = 1 - p(B) = 1 - \left(\frac{1}{2}\frac{b_1}{n_1+b_1} + \frac{1}{2}\frac{b_2}{n_2+b_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{n_1}{n_1+b_1} + \frac{1}{2}\frac{n_2}{n_2+b_2}.$$

Ainsi la probabilité recherchée est, après simplification : $\boxed{p(A_1|N) = \frac{\frac{n_1}{n_1+b_1}}{\frac{n_1}{n_1+b_1}+\frac{n_2}{n_2+b_2}}.}$

3. **Relation entre p_i et p_{i-1}. :**
Soit $A_{1,i}$ (resp. $A_{2,i}$) l'événement "le i^e tirage se fait dans U_1 (resp. U_2)". Soit B_i l'événement "la i^e boule tirée est blanche", en particulier $p_i = p(B_i)$ pour tout i. De plus, d'après les règles de tirage, pour $2 \leqslant i \leqslant n$, $p_{i-1} = p(A_{1,i})$ et $1 - p_{i-1} = p(A_{2,i})$. En utilisant comme à la question 1 la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} p_i & = & p(B_i) \\ & = & p(B_i|A_{1,i})p(A_{1,i}) + p(B_i|A_{2,i})p(A_{2,i}) \\ & = & p(B_i|A_{1,i})p_{i-1} + p(B_i|A_{2,i})(1-p_{i-1}) \\ & = & \frac{b_1}{n_1+b_1}p_{i-1} + \frac{b_2}{n_2+b_2}(1-p_{i-1}) \\ & = & \left(\frac{b_1}{n_1+b_1} - \frac{b_2}{n_2+b_2}\right)p_{i-1} + \frac{b_2}{n_2+b_2} \\ & = & \alpha p_{i-1} + \beta, \end{array}$$

à condition de poser $\boxed{\alpha = \frac{b_1}{n_1+b_1} - \frac{b_2}{n_2+b_2} \text{ et } \beta = \frac{b_2}{n_2+b_2}.}$

4. **Calcul de p_1 en fonction de α, β :**
D'après le résultat de la question 1 et la question précédente, on a immédiatement :
$\boxed{p_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{b_1}{n_1+b_1} + \frac{b_2}{n_2+b_2}\right) = \frac{1}{2}(\alpha+2\beta).}$

Le nombre α est différent de 1 :
En effet, comme b_1 et b_2 sont des entiers strictement positifs, on a :

$$n_1 + b_1 > b_1 \text{ et } n_2 + b_2 > b_2,$$

d'où

$$0 < \frac{b_1}{n_1+b_1}, \frac{b_2}{n_2+b_2} < 1,$$

d'où

$$-1 < \alpha = \frac{b_1}{n_1+b_1} - \frac{b_2}{n_2+b_2} < 1.$$

On a donc bien $\boxed{\alpha \neq 1.}$

5. **Calcul de p_i :**
Montrons par récurrence sur i, à partir de $i = 1$, la relation $\mathcal{R}(i)$ suivante :

$$p_i = \frac{\alpha^i}{2} + \beta\frac{1-\alpha^i}{1-\alpha}.$$

– $\mathcal{R}(1)$ est vraie d'après la question précédente puisque

$$\frac{\alpha^1}{2} + \beta\frac{1-\alpha^1}{1-\alpha} = \frac{\alpha^1}{2} + \beta = p_1.$$

– La relation $\mathcal{R}(i)$ entraîne la relation $\mathcal{R}(i+1)$. En effet, d'après la question 3, pour tout i entre 1 et $n-1$, on a :

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= \alpha p_i + \beta \\ &= \alpha\left(\frac{\alpha^i}{2} + \beta\frac{1-\alpha^i}{1-\alpha}\right) + \beta \\ &= \frac{\alpha^{i+1}}{2} + \beta\left(\alpha\frac{1-\alpha^i}{1-\alpha} + 1\right) \\ &= \frac{\alpha^{i+1}}{2} + \beta\frac{\alpha - \alpha^{i+1} + (1-\alpha)}{1-\alpha} \\ &= \frac{\alpha^{i+1}}{2} + \beta\frac{1-\alpha^{i+1}}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

On reconnaît bien la relation $\mathcal{R}(i+1)$.

SOLUTION DU PROBLÈME 11.63

1. **Probabilités conditionnelles $P(B_i|A_j)$:**

$P(B_i\|A_j)$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$i=1$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$i=2$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$i=3$	0	0	0	$\frac{1}{4}$

2. **Calcul des $P(A_j)$:**
D'après l'indépendance on a :

	femme RR	femme Rr
homme RR	$P(A_1) = (1-\lambda)^2$	$P(A_3) = \lambda(1-\lambda)$
homme Rr	$P(A_2) = \lambda(1-\lambda)$	$P(A_4) = \lambda^2$

3. **Calcul des $P(B_i)$:**
D'après la $\boxed{\text{formule des probabilités totales,}}$ on a, pour tout i :

$$P(B_i) = P(B_i|A_1)P(A_1) + P(B_i|A_2)P(A_2) + P(B_i|A_3)P(A_3) + P(B_i|A_4)P(A_4).$$

D'après les résultats des deux question précédentes, on déduit :

$$P(B_1) = 1\times(1-\lambda)^2 + \frac{1}{2}\times\lambda(1-\lambda) + \frac{1}{2}\times\lambda(1-\lambda) + \frac{1}{4}\lambda^2 = \frac{\lambda^2}{4} - \lambda + 1.$$

$$P(B_2) = 0\times(1-\lambda)^2 + \frac{1}{2}\times\lambda(1-\lambda) + \frac{1}{2}\times\lambda(1-\lambda) + \frac{1}{2}\lambda^2 = \lambda - \frac{\lambda^2}{2}.$$

$$P(B_3) = 0\times(1-\lambda)^2 + 0\times\lambda(1-\lambda) + 0\times\lambda(1-\lambda) + \frac{1}{4}\lambda^2 = \frac{\lambda^2}{4}.$$

Probabilité qu'un individu de la génération suivante soit porteur du gène sachant qu'il n'est pas mort à la naissance. :
C'est :

$$P(B_2|B_1\cup B_2) = \frac{P(B_2\cap(B_1\cup B_2)}{P(B_1\cup B_2)} = \frac{P(B_2)}{P(B_1)+P(B_2)} = \frac{P(B_2)}{1-P(B_3)}.$$

Soit

$$P(B_2|B_1\cup B_2) = \frac{\lambda - \frac{\lambda}{2}}{1-\frac{\lambda^2}{4}} = \frac{\lambda\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}.$$

D'où finalement $\boxed{\dfrac{\lambda}{1+\frac{\lambda}{2}}.}$

4. **Variations de la fréquence du gène d'une maladie génétique non viable au cours des générations :**
comme $\lambda \in]0,1[$, on a :
$$1+\frac{\lambda}{2} > 1,$$
d'où
$$\frac{\lambda}{1+\frac{\lambda}{2}} < \lambda.$$

5. **Application à la mucoviscidose :**

   (a) **Proportion λ d'hétérozygotes :**
   Les hypothèses indiquent que
   $$P(A_3) = \frac{156}{775000}.$$
   Comme, par ailleurs, $P(A_3) = \frac{\lambda^2}{4}$, on déduit :
   $$\boxed{\lambda = \sqrt{4 \times \frac{156}{775000}} \simeq 2,83\%.}$$

   (b) **Proportion à la génération suivante :**
   C'est
   $$\frac{\lambda}{1+\frac{\lambda}{2}} = 2,78\%.$$
   Ainsi la proportion de porteurs du gène diminue, mais très très lentement.

Solutions des exercices du chapitre 12

Solution de l'exercice 12.3

Par hypothèse il existe un nombre réel a vérifiant :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \; P(X = k) = ak^2.$$

De $1 = P(X = 1) + \cdots + P(X = n)$, on déduit $a = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$.

Solution de l'exercice 12.7

La variable aléatoire T est à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$ et on a :

$$P(T = 1) = p, P(T = 2) = (1 - p)p, P(T = 3) = (1 - p)^2 p,$$
$$\ldots, P(T = k) = (1 - p)^{k-1} p, \ldots, P(T = n - 1) = (1 - p)^{n-2} p, P(T = n) = (1 - p)^n.$$

Solution de l'exercice 12.8

1. Analogue à l'exercice 12.7.
2. Il faut que $p \geqslant 1 - \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

Solution de l'exercice 12.12

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants sur n billets achetés ; soi N le nombre total de billets mis en vendus. On sait qu'alors X suite une loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ avec $p = \dfrac{2}{1000}$. La question consiste donc à trouver n tel que

$$P(X \geqslant 1) \geqslant 0,5.$$

Le nombre N de billets vendus n'est pas donné mais le contexte (une tombola) suggère que ce nombre est important par rapport à n ; on peut donc approcher la loi de X par une loi $\mathcal{B}(n, p)$. Alors :

$$P(X \geqslant 1) \geqslant 0,5 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geqslant 0,5 \Leftrightarrow P(X = 0) \leqslant 0,5 \Leftrightarrow (1-p)^n \leqslant 0,5 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 0,5}{\ln(1 - p)} \simeq 346,23.$$

Donc il faut que $\boxed{n \geqslant 347.}$

Solution de l'exercice 12.13

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de réacteurs qui tombent en panne au cours d'une vol ; comme les pannes de chaque réacteur sont indépendantes et de même probabilité p, on reconnaît un schéma de Bernoulli et donc X suit une loi binomiale de paramètres n et p où n est le nombre de réacteurs. On en déduit donc que :

1. La probabilité d'accident d'un avion à deux réacteurs est :
$$P(X > 1) = P(X = 2) = C_2^2 p^2 (1 - p)^0 = p^2.$$
2. La probabilité d'accident d'un avion à quatre réacteurs est :
$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = C_4^3 p^3 (1 - p)^1 + C_4^4 p^4 (1 - p)^0 = 4p^3(1 - p) + p^4 = 4p^3 - 3p^4.$$
3. On détermine le type d'appareil le plus sûr en comparant les nombres p^2 et $4p^3 - 3p^4$ en fonction de p. Cela revient à déterminer le signe de la différence :
$$f(p) = 4p^3 - 3p^4 - p^2 = p^2(4p - 3p^2 - 1) = p^2(1 - p)(3p - 1).$$
Ainsi $4p^3 - 3p^4 \geqslant p^2$ si $p \in \left]\dfrac{1}{3}, 1\right[$ et $4p^3 - 3p^4 \leqslant p^2$ si $p \in \left]0, \dfrac{1}{3}\right[$. Finalement l'appareil quadri-réacteur est plus sûr lorsque p est petit et c'est le contraire pour p supérieur à $\dfrac{1}{3}$.

Solution de l'exercice 12.22

1. La variable aléatoire $20 - X$ suit une loi uniforme sur $\{0, \ldots, 19\}$
2. La variable aléatoire $\max(X, 19) - 19$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{20}$.

Solution de l'exercice 12.34

1. **Probabilité que (D) et (D') soient deux droites :**
L'équation $Ax + By + C = 0$ (resp. $A'x + B'y + C' = 0$) est celle d'une droite à la seule condition que $(A, B) \neq (0, 0)$ (resp. $(A', B') \neq (0, 0)$). L'événement "(D) et (D') sont deux droites" est donc

$$E = ((A, B) \neq (0, 0)) \cap ((A', B') \neq (0, 0)).$$

C'est donc le complémentaire de l'événement $((A, B) = (0, 0)) \cup ((A', B') = (0, 0))$. Or, d'après la formule de Poincaré, on a :

$$\begin{aligned} P(((A,B) = (0,0)) \cup ((A',B') = (0,0))) &= P((A,B) = (0,0)) \\ &\quad + P((A',B') = (0,0)) \\ &\quad - P(((A,B) = (0,0)) \cap ((A',B') = (0,0))) \\ &= P((A = 0) \cap (B = 0)) \\ &\quad + P((A' = 0) \cap (B' = 0)) \\ &\quad - P((A = 0) \cap (B = 0) \cap (A' = 0) \cap (B' = 0)) \end{aligned}$$

Comme A, B, A', B' suivent une loi de Bernoulli de paramètre p on a :

$$P(A = 0) = P(B = 0) = P(A' = 0) = P(B' = 0) = 1 - p$$

Comme ces quatre variables aléatoires sont indépendantes on déduit que

$$P(((A,B) = (0,0)) \cup ((A',B') = (0,0))) = 2(1-p)^2 - (1-p)^4.$$

d'où

$$P(E) = 1 - P(((A,B) = (0,0)) \cup ((A',B') = (0,0))) = 1 - (2(1-p)^2 - (1-p)^4).$$

Soit finalement $\boxed{P(E) = (1 - (1-p)^2)^2 = (2p - p^2)^2.}$

2. **Probabilité que (D) et (D') soient parallèles sachant que ce sont des droites :**
On sait que les deux droites d'équations $Ax + By + C = 0$ et $A'x + B'y + C' = 0$ sont parallèles si et seulement si elles ont mêmes directions *i.e.*

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; Ax + By = 0 \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; A'x + B'y = 0 \right\}.$$

Il faut et il suffit pour cela que les vecteurs (A, B) et (A', B') soient colinéaires *i.e.*

$$AB' - BA' = 0 \qquad (*)$$

La probabilité recherchée est donc

$$p_0 = P(AB' - BA' = 0 | E) = \frac{P((AB' - BA' = 0) \cap E)}{P(E)}.$$

Le dénominateur a été calculé à la question précédente ; calculons le numérateur. D'après ce qu'on a vu dans la question précédente

$$E = ((A,B) \neq (0,0)) \cap ((A',B') \neq (0,0))$$

donc

$$(AB' - BA' = 0) \cap E = ((A,B) \neq (0,0)) \cap ((A',B') \neq (0,0)) \cap (AB' - BA' = 0).$$

Or A, B, A', B' sont à valeurs dans $\{0,1\}$ puisqu'elles suivent une loi de Bernoulli ; il y a donc $16 = 2^4$ possibilités pour les valeurs de (A, B, A', B'), parmi lesquelles on peut énumérer tous les quadruplets qui vérifient simultanément les conditions :

$$(A,B) \neq (0,0),\ (A',B') \neq (0,0) \text{ et } AB' - BA' = 0,$$

à savoir :

$$(A,B,A',B') \in \{(0,1,0,1); (1,0,1,0); (1,1,1,1)\}.$$

Comme A, B, A', B' sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} P((A,B,A',B') = (0,1,0,1)) &= P((A=0) \cap (B=1) \cap (A'=0) \cap (B'=1)) \\ &= P(A=0)P(B=1)P(A'=0)P(B'=1) \\ &= p^2(1-p)^2. \end{aligned}$$

Et, de même :

$$P((A,B,A',B') = (1,0,1,0)) = p^2(1-p)^2 \ ;$$

$$\text{et } P((A,B,A',B') = (1,1,1,1)) = p^4.$$

On déduit que :

$$\begin{aligned} P((AB' - BA' = 0) \cap E) &= P((A,B,A',B') = (0,1,0,1)) \\ &\quad + P((A,B,A',B') = (1,0,1,0)) \\ &\quad + P((A,B,A',B') = (1,1,1,1)) \\ &= 2p^2(1-p)^2 + p^4, \end{aligned}$$

d'où $\boxed{p_0 = \dfrac{2p^2(1-p)^2 + p^4}{(2p-p^2)^2}.}$

Solution de l'exercice 12.45

On trouve :

$$\boxed{X(\Omega) = \{0,1,2\},\ P(X=0) = \frac{1}{2},\ P(X=1) = 0,\ P(X=2) = \frac{1}{2},\ E(X) = 1.}$$

Solution de l'exercice 12.46

On trouve :

$$\boxed{E(X) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}.}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.47

1. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{p^k - p^{k+1}}{1-p^{n+1}} \\ &= \frac{1}{1-p^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (p^k - p^{k+1}) \\ &= \frac{1}{1-p^{n+1}} (1-p^{n+1}) \qquad \text{par télescopage} \\ &= 1\end{aligned}$$

2. D'après le théorème de transfert on a :

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k\frac{p^k - p^{k+1}}{1-p^{n+1}} \\ &= \frac{1}{1-p^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} k(p^k - p^{k+1}) \\ &= \frac{1}{1-p^{n+1}} (p^1 + p^2 + \cdots + p^n - np^{n+1}) \qquad (simplifications) \\ &= \frac{1}{1-p^{n+1}} \left(\frac{p-p^{n+1}}{1-p} - np^{n+1} \right) \\ &= \frac{p-(n+1)p^{n+1} + np^{n+2}}{1-p^{n+1}}\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.58

La variable aléatoire X est à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$, donc, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$P(X \geqslant k) = P(X=k) + P(X=k+1) + \cdots + P(X=n) = \sum_{i=k}^{n} P(X=i).$$

D'après

$$\left\{ (i,k) \in \{1, \ldots, n\}^2 \;\middle|\; 1 \leqslant k \leqslant n \text{ et } k \leqslant i \leqslant n \right\} = \left\{ (i,k) \in \{1, \ldots, n\}^2 \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant k \leqslant i \right\},$$

on déduit, en appliquant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} P(X=i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} P(X=i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} iP(X=i) \\ &= E(X).\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 12.48

On trouve :

$$\boxed{E(X) = \frac{3(n+1)}{4} \text{ et } E(Y) = \frac{n+1}{2}.}$$

Solution de l'exercice 12.61

Soit A_i l'événement "la boule tirée de l'urne U_i est blanche", et X_i la variable aléatoire indicatrice de A_i. Alors X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i+1}$ et on a :

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

donc, par linéarité de l'espérance, on a :

$$\boxed{E(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}.}$$

Solution de l'exercice 12.71

1. On reconnaît un schéma de Bernoulli ; ainsi les variables aléatoires X_i suivent une loi binomiale $\mathcal{B}\left(\frac{1}{3}, n\right)$.

2. Comme $X_1 + X_2 + X_3 = n$, on a $X_1 + X_2 = n - X_3$ qui suit un loi $\mathcal{B}\left(\frac{2}{3}, n\right)$. Ainsi les variances valent :
$$V(X_1) = V(X_2) = V(X_1 + x_2) = 2n/9.$$
D'après la relation usuelle :
$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + 2\text{cov}(X_1, X_2) + V(X_2),$$
on déduit que :
$$\boxed{\text{cov}(X_1, X_2) = -n/9.}$$

Solution de l'exercice 12.72

1. La linéarité de l'espérance donne $E(T) = aE(X)+bE(Y) = (a+b)\theta$. Ainsi $E(T) = \theta$ si et seulement si $\boxed{a + b = 1.}$
2. On a :
$$V(T) = (a^2 + b^2)\theta + 2ab\rho = (a^2 + (1-a)^2)\theta + 2a(1-a)\rho$$
On étudie alors la fonction $a \mapsto (a^2 + (1-a)^2)\theta + 2a(1-a)\rho$ pour trouver un éventuel minimum.

Solution de l'exercice 12.35

1. **Indépendance de X et T :**
On a $X = T - n$ donc il n'est pas possible que $X = 0$ et $T = 0$ en même temps $(n \neq 0)$ *i.e.* :
$$P(X = 0 \cap T = 0) = 0$$
Or comme X suit une loi $\mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$ on a : $P(X = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \neq 0$
De plus : $P(T = 0) = P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \neq 0$. Donc $P(X = 0 \cap T = 0) \neq P(X = 0)P(T = 0)$.
Ainsi les variables aléatoires $\boxed{X \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

Indépendance de X et Y :

Comme on a supposé que T et Y sont indépendantes, on déduite que $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$ En effet, pour tout k, l on a :

$$P(X = k \cap Y = l) = P(T = k + n \cap Y = l) = P(T = k + n)P(Y = l) = P(X = k)P(Y = l).$$

2. **Valeurs possibles de Z :**

Comme T suit une loi $\mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$, ses valeurs possibles sont $\{0, \ldots, 2n\}$. Les valeurs possibles de $X = T - n$ sont donc $\{-n, \ldots, n\}$. Les valeurs possibles de Y sont $\{-1, 1\}$. Les valeurs possibles de $Z = XY$ sont donc les produits de toutes les valeurs possibles de X et de celles de Y soit :

$$\boxed{Z(\Omega) = \{-n, \ldots, n\}.}$$

3. **Loi de Z :**

Comme Y ne peut prendre que les valeurs 1 et -1, les événements $(Y = 1)$ et $(Y = -1)$ forment un système complet d'événement. Pour tout $r \in \{-n, \ldots, n\}$ on peut donc appliquer la $\boxed{\text{formule des probabilités totales :}}$

$$\begin{aligned} P(Z = r) &= P(Z = r|Y = 1)P(Y = 1) + P(Z = r|Y = -1)P(Y = -1) \\ &= P(XY = r|Y = 1)P(Y = 1) + P(XY = r|Y = -1)P(Y = -1) \end{aligned}$$

Or la probabilité que $XY = r$ sachant que $Y = 1$ est égale à la probabilité que $X = r$. De même, la probabilité que $XY = r$ sachant que $Y = -1$ est égale à la probabilité que $X = -r$. Donc finalement :

$$\boxed{\forall r \in \{-n, \ldots, n\},\ P(Z = r) = P(X = r)P(Y = 1) + P(X = -r)P(Y = -1).}$$

4. **X et Z ont même loi :**

Comme on a déjà vu que X et Z ont les mêmes valeurs possibles il suffit de montrer que :

$$\forall r \in \{-n, \ldots, n\},\ P(Z = r) = P(X = r).$$

La variables aléatoire T suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$ donc :

$$\forall k \in \{0, \ldots, 2n\},\ P(T = k) = C_{2n}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2n-k} = \frac{C_{2n}^k}{2^{2n}}$$

Ainsi la loi de X est donnée par :

$$\forall r \in \{-n, \ldots, n\},\ P(X = r) = P(T = n + r) = \frac{C_{2n}^{n+r}}{2^{2n}}.$$

En particulier, d'après la propriété $\boxed{C_m^t = C_m^{m-t}}$ on a :

$$P(X = -r) = \frac{C_{2n}^{n-r}}{2^{2n}} = \frac{C_{2n}^{2n-(n-r)}}{2^{2n}} = \frac{C_{2n}^{n+r}}{2^{2n}} = P(X = r).$$

Donc d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} P(Z = r) &= P(X = r)P(Y = 1) + P(X = -r)P(Y = -1) \\ &= P(X = r)q + P(X = r)(1 - q) = P(X = r)(q + (1 - q)) \\ &= P(X = r). \end{aligned}$$

5. **X et Z ne sont pas indépendantes :**
En effet $Z = XY$ et en raisonnant de manière analogue à la question 1 (indépendance de X et T) on a :
$$P(Z = n \cap X = 0) = 0 \text{ mais } P(Z = n) \neq 0 \text{ et } P(X = 0) \neq 0.$$
6. **Espérance de Z :**
Comme l'espérance ne dépend que de la loi et que X et Y ont même loi on a :
$$E(Z) = E(X) = E(T - n) = E(T) - n.$$
Comme T suit une loi binomiale de paramètre $2n$ et $\frac{1}{2}$ son espérance vaut $E(T) = (2n) \times \frac{1}{2} = n$. Donc finalement l'espérance de Z vaut :
$$\boxed{E(Z) = 0.}$$
Autre méthode : comme X et Y sont indépendantes on a :
$$E(Z) = E(XY) = E(X)E(Y),$$
et $E(X) = 0$ comme précédemment.
7. **Variance de X :**
On a vu que $E(X) = 0$. On calcule :
$$E(X^2) = E((T-n)^2) = E(T^2 - 2nT + n^2) = E(T^2) - 2nE(T) + n^2 = E(T^2) - n^2$$
Or
$$E(T^2) = \sum_{k=0}^{2n} k^2 \frac{C_{2n}^k}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{2n} k^2 C_{2n}^k.$$
Comme $k^2 C_{2n}^k = 2n(2n-1)C_{2n-2}^{k-2} + 2nC_{2n-1}^{k-1}$, on a :
$$\begin{aligned}
E(T^2) &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{2n} 2n(2n-1)C_{2n-2}^{k-2} + 2nC_{2n-1}^{k-1} \\
&= \frac{2n(2n-1)}{2^{2n}} \sum_{\substack{l=0 \\ (l=k-2)}}^{2n-2} C_{2n-2}^l + \frac{2n}{2^{2n}} \sum_{\substack{l=0 \\ (l=k-1)}}^{2n-1} C_{2n-1}^l \\
&= \frac{2n(2n-1)}{2^{2n}} (1+1)^{2n-1} + \frac{2n}{2^{2n}} (1+1)^{2n-2} \\
&= n^2 + \frac{n}{2}
\end{aligned}$$
Donc finalement $\boxed{var(X) = \frac{n}{2}.}$

Solution du problème 12.79

1. **Relation de récurrence entre $P(n)$ et $P(n-1)$:**
Si nous désignons par A_n l'événement "I_n transmet le message exact", les données de l'énoncé indiquent :
$$P((A_n | A_{n-1}) = p \text{ et } P(A_n | \overline{A_{n-1}}) = q$$
D'après le principe des probabilités totales, on a :
$$P(A_n) = P(A_n | A_{n-1})P(A_{n-1}) + P(A_n | \overline{A_{n-1}})P(\overline{A_{n-1}}),$$
soit :
$$\boxed{P(n) = pP(n-1) + q(1 - P(n-1)) = q + (p-q)P(n-1).}$$

2. **Calcul de $P(n)$:**
   Montrons par récurrence sur n (de 1 à r) la relation $\mathcal{R}(n)$ suivante :
   $$P(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n.$$
   - $\mathcal{R}(1)$ est vraie car d'après l'énoncé $P(1)$ vaut p. Or :
   $$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-(1-p)) = p.$$
   - $\mathcal{R}(n)$ entraîne $\mathcal{R}(n+1)$. En effet d''après la question précédente on a :
   $$P(n+1) = q+(p-q)P(n) = q+(p-q)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n) = q+\frac{1}{2}(p-q)+\frac{1}{2}(p-q)^{n+1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^{n+1}.$$
3. **Calcul de $P(10)$ pour $p = 0,9$:**
   On trouve
   $$P(10) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0,8)^{10} \simeq 0,5537.$$
   La probabilité que le message transmis soit correct ne dépasse plus guère 50%.
4. **Loi et espérance de X :**
   L'événement "I_{r+1} reçoit bien le message donné par I_0" signifie que "I_r transmet bien le message donné par I_0" ; il a donc une probabilité $P(r)$ calculée aux question précédentes en fonction de p, q, r. On reconnaît que X est la fonction indicatrice de cet événement. Ainsi X suit une $\boxed{\text{loi de Bernoulli de paramètre } P(r) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^r.}$ On sait qu'alors son espérance est :
   $$\boxed{E(X) = P(r) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^r.}$$
5. **Loi de Y :**
   Les k expériences successives sont indépendantes, c'est-à-dire que les k événements "I_r reçoit bien le message donné par I_0 lors de l'expérience i" $(1 \leqslant i \leqslant k)$ sont indépendants et de même probabilité $P(r)$. On remarque que Y est la somme des variables aléatoires X définies comme à ma question précédente pour chaque expérience. On sait qu'alors Y **suit une loi binomiale de paramètres k et $P(r) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^r$.**

SOLUTION DU PROBLÈME 12.80

1. **valeurs prises par X :**
   La cinquième chèvre vaccinée ne peut apparaître que quand les quatre autres sont déjà passées. On a donc :
   $$\boxed{X(\Omega) = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}}$$
2. **Loi de X :**
   La cinquième chèvre vaccinée passe au rang $k \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ si et seulement si on a les deux conditions suivantes à la fois :
   - A : les $k-1$ premières chèvres qui passent sont 4 chèvres vaccinées (parmi 5 possibles), et donc $k-5$ chèvres non vaccinées (parmi 5 possibles). Ainsi :
   $$P(A) = \frac{C_5^4 C_5^{k-5}}{C_{10}^{k-1}}.$$

– B : la k^{e}chèvre est la seule vaccinée, parmi les $10-(k-1)$ restantes. ainsi :

$$P(B|A) = \frac{1}{11-k}.$$

Ainsi la probabilité recherchée est

$$P(X=k) = P(A\cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{C_5^4 C_5^{k-5}}{(11-k)C_{10}^{k-1}}$$

On a ainsi la loi de X

$$\boxed{P(X=k) = \frac{C_5^4 C_5^{k-5}}{(11-k)C_{10}^{k-1}},\quad k\in\{5,6,7,8,9,10\}\,.}$$

3. **Espérance de X :**
<u>*Á la main :*</u> le calcul effectif donne :

$$P(X=5) = \frac{C_5^4C_5^0}{6C_{10}^4} = \frac{5\times 1}{6}\,\frac{4\times 3\times 2\times 1}{10\times 9\times 8\times 7} = \frac{1}{252}$$

Et de même on obtient :

k	5	6	7	8	9	10
$P(X=k)$	$\frac{1}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{15}{252}$	$\frac{35}{252}$	$\frac{70}{252}$	$\frac{126}{252}$

Pour s'assurer qu'on n'a pas fait d'erreur de calcul on peut alors vérifier que :

$$P(X=5)+\cdots+P(X=10)=1.$$

Puis on calcule l'espérance de X par :

$$E(X) = \sum_{k=5}^{10} kP(X=k) = 5\times\frac{1}{252} + 6\times\frac{5}{252} + 7\times\frac{15}{252} + 8\times\frac{35}{252} + 9\times\frac{70}{252} + 10\times\frac{126}{252} = \frac{55}{6}.$$

<u>*Calcul avec Matlab :*</u> on définit la fonction $(n,p)\longmapsto C_n^p$ par

```
function y=combinaison(n,p)
if p> n, y=0 ;
else
  y=1 ;
  for i=n-p+1 :n, y=y*i ; end ;
  for i=1 :p, y=y/i ; end ;
end ;
```

puis on calcule la loi de X par :

```
>>clear X ;
>>for k=5 :10, X(k)=combinaison(5,4)*combinaison(5,k-5)/((11-k)*combinaison(10,k-1)) ; end ;
```

enfin on calcule l'espérance par :

```
>>E=0 ;
>>for k=5 :10, E=E+k*X(k) ; end ;
>>E
      ans = 9.1667
```

On conclut donc que $\boxed{E(X) = \frac{55}{6} \simeq 9,1667.}$

4. **loi de Y :**
Chaque chèvre va dans l'abri A_1 avec une probabilité $\frac{1}{3}$, dans l'abri A_2 avec une probabilité $\frac{1}{3}$, ou reste dehors avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Les n événements "la i^{e} chèvre se rend dans l'abri A_1" (pour $1 \leqslant i \leqslant n$)), qui sont indépendants, sont donc équiprobables de probabilité $\frac{1}{3}$; on sait alors que la variable aléatoire Y, qui compte le nombre de ces événements réalisés, suit une $\boxed{\text{loi binomiale de paramètre } n \text{ et } \frac{1}{3}.}$

5. **Espérance et variance de Y :**
D'après le cours on connaît l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit un loi binomiale :
$$\boxed{E(Y) = \frac{n}{3} \text{ et } \operatorname{var}(Y) = \frac{2n}{9}.}$$

6. **Événement $(Y = 0) \cap (Z = 0)$:**
Cet événement est $\boxed{\text{impossible}}$ car si aucun abri n'est vide ($Z = 0$), alors il n'est pas possible que l'abri A_1 soit vide ($Y = 0$).

7. **Calcul de $P((Y = 0) \cap (Z = 2))$:**
Si les deux abris sont vides ($Z = 2$) on a automatiquement $Y = 0$. La probabilité recherchée est donc celle que toutes les chèvres restent dehors. en raisonnant comme à la question 4, on voit que le nombre de chèvres qui restent dehors est une variable aléatoire T qui suit une $\boxed{\text{loi binomiale } \mathcal{B}(n, \frac{1}{3}).}$ On a donc :
$$P((Y = 0) \cap (Z = 2)) = P(T = n) = C_n^n \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-n} = \frac{1}{3^n}.$$

8. **Calcul de $P((Y = 0) \cap (Z = 1))$:**
Comme Z ne peut prendre que les valeurs 0,1 et 2, d'après la $\boxed{\text{formule des probabilités totales :}}$
$$P(Y = 0) = P((Y = 0) \cap (Z = 0)) + P((Y = 0) \cap (Z = 1)) + P((Y = 0) \cap (Z = 2)).$$
Comme Y suit une loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$, on a :
$$P(Y = 0) = \frac{2^n}{3^n},$$
Et on a $P((Y = 0) \cap (Z = 0)) = 0$ d'après la question 6. On déduit donc, en utilisant aussi la question 7 :
$$\boxed{P((Y = 0) \cap (Z = 1)) = \frac{2^n}{3^n} - \frac{1}{3^n}.}$$

9. **Calcul de $P((Y = k) \cap (Z = 2))$:**
Quand $Z = 2$ toutes les chèvres sont restées dehors. On a donc forcément $Y = 0$. On déduit donc que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$:
$$\boxed{P((Y = k) \cap (Z = 2)) = 0.}$$

10. **Calcul de $P((Y = k) \cap (Z = 1))$:**
Quand $Z = 1$, cela signifie qu'un seul abri est utilisé. Si $Y = k$ pour un nombre k non nul, cela signifie que l'abri A_1 est utilisé. La conjonction $Y = k$ de $Z = 1$ signifie donc que k chèvres sont dans l'abri A_1 et les autres dehors.

Comme les chèvres agissent indépendamment les unes des autres, pour un groupe *donné* de k chèvres, la probabilité qu'elles soient toutes dans l'abri A_1 et que les $n-k$ autres restent dehors est :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \frac{1}{3^n}$$

Comme il y a C_n^k groupes de k chèvres donnés, la formules de probabilités totales donne :

$$\boxed{P((Y=k)\cap(Z=1)) = \frac{C_n^k}{3^n}.}$$

11. **Calcul de $P((Y=k)\cap(Z=0))$:**
D'après la $\boxed{\text{formule des probabilités totales,}}$ en tenant compte du résultat de la question 9, on a :

$$P(Y=k) = P((Y=k)\cap(Z=0)) + P((Y=k)\cap(Z=1)),$$

et comme

$$P(Y=k) = C_n^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} = \frac{C_n^k 2^{n-k}}{3^n},$$

on obtient :

$$\boxed{P((Y=k)\cap(Z=0)) = \frac{C_n^k}{3^n}(2^{n-k}-1).}$$

12. **Loi de Z :**
On sait que Z est à valeurs dans $\{0,1,2\}$. Il faut donc calculer $P(Z=j)$ pour $j=1,2$ et 3. Comme Y est à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$, en utilisant la $\boxed{\text{formule des probabilités totales}}$ on a :

$$P(Z=j) = \sum_{k=0}^{n} P((Y=k)\cap(Z=j)) = P((Y=0)\cap(Z=j)) + \sum_{k=1}^{n} P((Y=k)\cap(Z=j)).$$

Toutes les expressions figurant au second membre on été calculées aux questions 6 à 11. D'après les questions 7 et 9 on a :

$$\boxed{P(Z=2) = \frac{1}{3^n}}$$

D'après les questions 8 et 10 on a :

$$P(Z=1) = \frac{2^n}{3^n} - \frac{1}{3^n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{C_n^k}{3^n} = \frac{2^n - 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_n^k}{3^n}$$

Or la formule du binôme donne :

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k,$$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n - 1$, si bien que :

$$\boxed{P(Z=1) = \frac{2(2^n-1)}{3^n}}$$

On peut calculer $P(Z=0)$ de même en utilisant les question 6 et 11, mais il est plus simple de remarquer que :

$$\boxed{P(Z=0) = 1 - P(Z=1) - P(Z=2) = \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{3^n}}$$

13. **Espérance de Z :**
On sait que :
$$E(Z) = 0 \times P(Z=0) + 1 \times P(Z=1) + 2 \times P(Z=2),$$
soit, après simplifications :
$$\boxed{E(Z) = \frac{2^{n+1}}{3^n}.}$$

14. **Indépendance de Z et Y :**
D'après la question 9, on a :
$$P((Z=2) \cap (Y=n)) = 0$$
Or $P(Z=2) \neq 0$ d'après la question 12, et $P(Y=n) \neq 0$ d'après la question 4. On a donc :
$$P((Z=2) \cap (Y=n)) \neq P(Z=2)P(Y=n).$$
Ainsi les variables aléatoires $\boxed{Y \text{ et } Z \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

SOLUTION DU PROBLÈME 12.81

1. **Matrice B :**
Comme t_{n-1} est à valeurs dans $\{0, \dots, 2k\}$, les événements $(t_{n-1} = j)_{1 \leqslant j \leqslant 2k}$ forment une partition de Ω. La formule des probabilités totales donne donc
$$p(t_n = i) = p(t_n = i | t_{n-1} = 0) p(t_{n-1} = 0) + \dots + p(t_n = i | t_{n-1} = 2k) p(t_{n-1} = 2k).$$
On a donc bien $X_n = BX_{n-1}$ à condition de prendre
$$B = \begin{pmatrix} p(t_n = 0 | t_{n-1} = 0) & \cdots & p(t_n = 0 | t_{n-1} = 2k) \\ \vdots & & \vdots \\ p(t_n = 2k | t_{n-1} = 0) & \cdots & p(t_n = 2k | t_{n-1} = 2k) \end{pmatrix}.$$
De plus, par hypothèse la loi conditionnelle de t_n sachant $t_{n-1} = j$ est la loi binomiale de paramètres $2k$ et $\frac{j}{2k}$ *i.e.*
$$p(t_n = i | t_{n-1} = j) = C_{2k}^i \left(\frac{j}{2k}\right)^i \left(1 - \frac{j}{2k}\right)^{2k-i},$$
ainsi $\boxed{\text{la matrice } B \text{ ne dépend pas de } n.}$

2. **Calcul de QX_n :**
On a facilement :
$$QX_n = p(t_n = 0) + p(t_n = 1) + \dots + p(t_n = 2k) = 1,$$
soit $\boxed{QX_n = 1.}$ On calcule de même
$$RX_n = 0 \times p(t_n = 0) + 1 \times p(t_n = 1) + \dots + 2k \times p(t_n = 2k),$$
on reconnaît ainsi l'espérance de t_n $\boxed{RX_n = E(t_n).}$

3. **Calcul de QB et RB :**
La matrice QB est une matrice ligne à $2k+1$ coefficients dont le j^{e} $(0 \leqslant j \leqslant 2k)$ vaut :

$$\begin{aligned} p(t_n = 0|t_{n-1} = j) + \cdots + p(t_n = 2k|t_{n-1} = j) &= \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i \left(\frac{j}{2k}\right)^i \left(1 - \frac{j}{2k}\right)^{2k-i} \\ &= \left(\frac{j}{2k} + \left(1 - \frac{j}{2k}\right)\right)^{2k} \\ &= 1. \end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{QB = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = Q.}$
Le j^{e} coefficient du vecteur ligne RB se calcule de même par :

$$\begin{aligned} 0 \times p(t_n = 0|t_{n-1} = j) + \cdots + 2k \times p(t_n = 2k|t_{n-1} = j) &= \sum_{i=0}^{2k} iC_{2k}^i \left(\frac{j}{2k}\right)^i \left(1 - \frac{j}{2k}\right)^{2k-i} \\ &= 2k\frac{j}{2k} = j, \end{aligned}$$

car on reconnaît la formule de l'espérance d'une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}\left(2k, \frac{j}{2k}\right)$. On a bien $\boxed{RB = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 2k \end{pmatrix} = R.}$

Espérance de t_n :
L'équation $RB = R$ implique

$$RX_n = R(BX_{n-1}) = (RB)X_{n-1} = RX_{n-1}.$$

Ainsi l'espérance $E(t_n) = RX_n$ est une suite constante, donc elle est égale à son premier terme $\boxed{E(t_n) = E(t_0) = \mu}$

4. **Produit SB :**
On sait que la variance d'une variable aléatoire s de loi binomiale $\mathcal{B}\left(2k, \frac{j}{2k}\right)$ est

$$var(s) = E(s^2) - E(s)^2 = 2k\frac{j}{2k}\left(1 - \frac{j}{2k}\right) \text{ et } E(s) = 2k\frac{j}{2k},$$

d'où

$$E(s^2) = \sum_{i=0}^{2k} i^2 C_{2k}^i \left(\frac{j}{2k}\right)^i \left(1 - \frac{j}{2k}\right)^{2k-i} = 2k\frac{j}{2k}\left(1 - \frac{j}{2k}\right) + j^2.$$

Ainsi la matrice SB est une matrice ligne à $2k+1$ coefficients dont le j^{e} $(0 \leqslant j \leqslant 2k)$ vaut :

$$\begin{aligned} 0^2 p(t_n = 0|t_{n-1} = j) + \cdots + (2k)^2 p(t_n = 2k|t_{n-1} = j) &= \sum_{i=0}^{2k} i^2 C_{2k}^i \left(\frac{j}{2k}\right)^i \left(1 - \frac{j}{2k}\right)^{2k-i} \\ &= 2k\frac{j}{2k}\left(1 - \frac{j}{2k}\right) + j^2 \\ &= j + \left(1 - \frac{1}{2k}\right) j^2, \end{aligned}$$

La relation obtenue pour tout indice j est équivalente à l'équation matricielle $\boxed{SB = R + \left(1 - \frac{1}{2k}\right) S.}$

5. **Valeur de λ_n :**
Comme dans l'avant dernière question, nous déduisons de cette dernière relation :
$$SX_n = S(BX_{n-1}) = (SB)X_{n-1} = RX_{n-1} + \left(1 - \frac{1}{2k}\right) SX_{n-1},$$
soit
$$\lambda_n = \mu + \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \lambda_{n-1}.$$
Ainsi (λ_n) est une suite arithmético-géométrique ; on sait calculer son terme général en fonction de n, sous forme de la somme d'une suite constante et d'une suite géométrique ; tous calculs faits, il vient $\boxed{\lambda_n = 2k\mu + (\lambda_0 - 2k\mu)\left(1 - \frac{1}{2k}\right)^n.}$

6. **Limite de $E(t_n^2)$:**
Remarquons que
$$E(t_n^2) = \sum_{i=0}^{2k} i^2 p(t_n = i) = SX_n = \lambda_n.$$
Comme $\left|1 - \frac{1}{2k}\right| < 1$ on a
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^n = 0,$$
alors l'expression de λ_n trouvée à la question précédente permet de conclure que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(t_n^2) = 2k\mu.}$

7. **Inégalité :**
On a :
$$\begin{aligned} E(t) &= \sum_{i=0}^{2k} ip(t = i) \\ E(t^2) &= \sum_{i=0}^{2k} i^2 p(t = i) \\ 2kE(t) - E(t^2) &= \sum_{i=0}^{2k} (2ki - i^2)p(t = i) \\ &\geqslant (2ki - i^2)p(t = i) \geqslant 0, \end{aligned}$$
puisque tous les nombres considérés ($2k - i$ et $p(t = i)$) sont positifs. On obtient ainsi $\boxed{2kE(t) - E(t^2) \geqslant (2k - i)ip(t = i) \geqslant 0.}$
On déduit immédiatement $2kE(t) - E(t^2) \geqslant 0$, d'où $\boxed{2kE(t) \geqslant E(t^2).}$ Quand il y a égalité on a $(2k - i)ip(t = i) = 0$ pour tout i, donc $\boxed{p(t = i) = 0 \text{ sauf pour } i = 0 \text{ et } i = 2k.}$

8. **Loi limite :**
Le résultat de la question (5) indique que
$$\lim_{n\to+\infty} E(t_n^2) = 2kE(t_n),$$
d'où
$$\lim_{n\to+\infty} 2kE(t_n) - E(t_n^2) = 0.$$

La première inégalité de la question (7) permet alors de conclure, *via* le théorème des gendarmes, que
$$\lim_{n\to+\infty}(2k-i)ip(t_n=i)=0.$$
On en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}p(t_n=i)=0 \text{ pour } i\notin\{0,2k\}}$. Alors, comme
$$E(t_n)=\sum_{j=0}^{2k}ip(t_n=i)=\sum_{j=1}^{2k}ip(t_n=i)=\mu,$$
on déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}p(t_n=2k)=\frac{\mu}{2k}}$. Enfin d'après
$$1=\sum_{j=0}^{2k}p(t_n=i),$$
on déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}p(t_n=0)=1-\mu.}$