Annexe - Variables aléatoires

I - Lois discrètes usuelles

Uniforme	$X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$ $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$	$\forall k \in X(\Omega)$, $P(X=k) = \dfrac{1}{n}$	$E(X) = \dfrac{n+1}{2}$, $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$
	Situation modélisée : tirage équiprobable d'un élément parmi n		
Bernoulli	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ $X(\Omega) = \{0,1\}$	$P(X=0) = 1-p$ $P(X=1) = p$	$E(X) = p$ $V(X) = p(1-p)$
	Situation modélisée : on considère une épreuve aléatoire (*e*) et un événement A lié à (*e*) de probabilité p. On note X le nombre de réalisations de A lors d'une épreuve (*e*).		
Binomiale	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$	$\forall k \in X(\Omega)$, $P(X=k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$E(X) = np$ $V(X) = np(1-p)$
	Situation modélisée : on considère une épreuve aléatoire (*e*) qu'on répète n fois de suite dans des conditions identiques, et un événement A lié à (*e*) de probabilité p. On note X le nombre de réalisations de A lors d'une épreuve (*e*).		
Poisson	$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ $X(\Omega) = \mathbb{N}$	$\forall k \in X(\Omega)$, $P(X=k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$	$E(X) = \lambda$ $V(X) = \lambda$
	Pas de schéma théorique à retenir. Elle sera souvent utilisée pour modéliser les événements rares		
Géométrique	$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$	$\forall k \in X(\Omega)$, $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$	$E(X) = \dfrac{1}{p}$ $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$
	Situation modélisée : on considère une épreuve aléatoire (*e*) et un événement A lié à (*e*) de probabilité p. On répète l'épreuve (*e*) jusqu'à l'obtention de A; X désigne le nombre d'épreuves nécessaires.		

Loi de Bernoulli

X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, b)$ si, et seulement si, il existe une famille $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ de variables indépendantes suivant une même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ telles que

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Loi binomiale

Si $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1, p)$, $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_2, p)$ et si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$

Loi de Poisson

Si $X_1 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1)$, $X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_2)$ et si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

II - Variables à densité

Uniforme	$X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a, b]}$ $X(\Omega) = [a, b]$	$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ \ a \leq t \leq b \\ 0 & sinon \end{cases}$	$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$, $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ $X(\Omega) = [0, +\infty[$	$f(t) = \begin{cases} 0 & si\ \ t < 0 \\ \lambda\, e^{-\lambda t} & si\ \ t \geq 0 \end{cases}$	$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$
Normale centrée réduite	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ $X(\Omega) = \mathbb{R}$	$\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2} t^2}$	$E(X) = 0$ $V(X) = 1$
Normale	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ $X(\Omega) = \mathbb{R}$	$f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2}$	$E(X) = m$ $V(X) = \sigma^2$

Loi uniforme

- La variable X suit une loi uniforme sur $[a, b]$ (avec $a < b$) si, et seulement si, la variable $Y = \dfrac{X-a}{b-a}$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$
- La fonction de répartition F_X de X est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \;\; a \leq x \leq b \\ 1 & si \;\; x \geq b \end{cases}$$

Loi exponentielle

- Soit X une variable aléatoire réelle. X suit une loi exponentielle si, et seulement si :

$$\begin{cases} X(\Omega) = [0, +\infty[\\ \forall \; (s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \;, \;\; P_{(X > s)}(X > s + t) = P(X > t) \\ \forall \; s \in \mathbb{R}^+ \;, \;\; P(X > s) \neq 0 \end{cases}$$

- La fonction de répartition F_X de X est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

Loi normale

- On note Φ la fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Pour tout réel x , on a :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

- $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$, $\quad \forall \; x \in \mathbb{R} \,, \;\; \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ $\quad$ et $\quad X \hookrightarrow N\left(m, \sigma^2\right) \;\; \Leftrightarrow \;\; \dfrac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$