Mathématiques ECE 1re année

Exercices complémentaires

■ Chapitre 2 – Calcul algébrique

Exercice 1

On considère le programme suivant.

```
V=[]
for k=1:5
a=floor(30*rand())-15
b=floor(30*rand())-15
V=[V [a+b;a*b]]
disp("Système "+string(k))
disp("a+b = "+string(a+b),"a*b = "+string(a*b))
end
```

Sur la console.

```
Système 1
a*b = -33
a+b = 8

Système 2
a*b = 120
a+b = -22

Système 3
a*b = 2
a+b = 3

Système 4
a*b = 55
a+b = 16

Système 5
a*b = 0
a+b = -5
```

Explication :
• Initialement, V est un tableau vide.
• A chacune des 5 épreuves successives, deux nombres entiers a et b compris entre -15 et 15 sont donnés aléatoirement.
• A chacune des 5 épreuves successives, V s'enrichit d'une colonne ; à la première ligne, la somme des nombres $a+b$. A la seconde ligne, leur produit.
• A chacune des 5 épreuves, on affiche le système d'équations obtenu en prenant la nouvelle colonne du tableau V.

1. Pour chaque système d'équations, écrire une équation du second degré dont les racines sont a et b. Résoudre cette équation.

2. Compléter le programme précédent de façon qu'il affiche les solutions de ce système.

Corrigé exercice 1

Les solutions des systèmes sont des couples de réels (a, b).

1. Les réels a et b sont respectivement solutions des équations suivantes :

(1) $X^2 - 8X - 33 = 0$

(2) $X^2 + 22X + 120 = 0$

(3) $X^2 - 3X + 2 = 0$

(4) $X^2 - 16X + 55 = 0$

(5) $X^2 + 5X = 0$

• Les équations (3) et (5) ont des racines évidentes :

(3) $x' = 1$ et $x'' = 2$
Les solutions du système sont $(1,2)$ et $(2,1)$.

(5) $x' = 0$ et $x'' = 5$
Les solutions du système sont $(0,5)$ et $(5,0)$.

• Pour les autres équations, on calcule le discriminant Δ.

(1) $\Delta = 64 + 4 \times 33 = 4(16 + 33) = 4 \times 49$
Donc les racines de cette équation sont :

$x' = \frac{8-2\times7}{2} = -3$ et $x'' = \frac{8+2\times7}{2} = 11$
Il s'ensuit que les solutions du système sont $(-3,11)$ et $(11, -3)$.

(2) $\Delta = 22^2 - 4 \times 120 = 4(11^2 - 120) = 4$
Donc les racines de cette équation sont :

$x' = \frac{-22-2}{2} = -12$ et $x'' = \frac{-22+2}{2} = -10$
Il s'ensuit que les solutions du système sont $(-12, -10)$ et $(-10, -12)$.

(4) $\Delta = (-16)^2 - 4 \times 55 = 4(8^2 - 55) = 4 \times 9$
Donc les racines de cette équation sont :

$x' = \frac{16-2\times3}{2} = 5$ et $x'' = \frac{16+2\times3}{2} = 11$
Il s'ensuit que les solutions du système sont $(5, 11)$ et $(11,\ 5)$.

b. On peut par exemple compléter de la façon suivante :

```
U=[]; V=[]
for k=1:5
a=floor(30*rand())-15
b=floor(30*rand())-15
U=[U [a;b]]
V=[V [a+b;a*b]]
disp("Système "+string(k))
disp("a+b = "+string(a+b),"a*b = "+string(a*b))
end
disp(U,"Les solutions des systèmes sont respectivement (en
colonne) :
")
```

On obtient sur la console.

```
...
Les solutions des systèmes sont respectivement (en colonne) :
- 3. -12. 1. 5. 0.
11. -10. 2. 11. -5.
```

■ Chapitre 3 – Logique

Dans l'exercice 1, on montre l’utilisation de Scilab en logique. Il n’est destiné qu’à se familiariser avec le logiciel.
On utilisera ce qui suit :

Ecriture numérique d’une matrice booléenne
Une matrice A a coefficients positifs peut être convertie en une matrice booléenne, c’est-à-dire en une matrice dont les seuls coefficients sont 0 et 1. L’instruction bool2s(A) est une matrice de même taille que A telle que tous les coefficients non nuls de A sont remplacés par 1. Par exemple :

```
-->A=[1,2,0; 0,0,0.45]
A =
1. 2. 0.
0. 0. 0.45
-->bool2s(A)
ans =
1. 1. 0.
0. 0. 1.
```

Le produit matriciel de deux matrices booléennes se convertit en une matrice booléenne égale à une disjonction des propositions dont les valeurs de vérité sont les colonnes de la première matrice.

Par exemple, si p, q, r, s sont quatre propositions dont les valeurs de vérité conjointes peuvent être V-V-F-V, V-F-F-V, F-V-V-V et F-F-V-F, alors les valeurs de vérités de $p \vee r \vee s$ et de $q \vee s$ sont données par :

```
-->A=[1,1,0,1; 1,0,0,1; 0,1,1,1; 0,0,1,0] // On écrit en ligne
les
valeurs de vérités conjointes des propositions ; la première
colonne
est la matrice des valeurs de vérité de p
A =
1. 1. 0. 1.
1. 0. 0. 1.
0. 1. 1. 1.
0. 0. 1. 0.
-->X=[1,0,1,1; 0,1,0,1] // Les coefficients de p, q, r, s dans
p nr ns sont respectivement 1,0,1,1 ; les coeffcients de p, q,
r,
s dans q ns sont respectivement 0,1,0,1
X =
1. 0. 1. 1.
0. 1. 0. 1.
// Les disjonctions s'obtiennent en effectuant le produit de A
par
la transposée de X notée X'
// La matrice des disjonctions est la matrice booléenne :
-->Y=bool2s(A*X')

Y =
```

```
1. 1.
1. 1.
1. 1.
1. 0.
```

Il s'ensuit que, compte tenu des hypothèses faites sur les valeurs de vérité conjointes, des propositions p, q, r, s, la réunion $p \vee r \vee s$ est toujours vraie et la réunion $q \vee s$ est fausse si, et seulement si, les propositions p, q, r, s sont respectivement V-F-V-F.

Le produit d'Hadamard de deux matrices de même taille est la matrice du produit des coefficients de mêmes indices ; pour effectuer ce produit entre les matrices A et B, on écrit $A.^{*}B$.
Le produit d'Hadamard de deux matrices booléennes est une matrice booléenne où chaque colonne est la matrice des valeurs de vérité des conjonctions ; dans le cas des matrices booléennes, on a $A.^{*}B = \min(A, B)$.
Reprenons la matrice A précédente et supposons que nous voulions avoir les valeurs de vérité de $p \wedge (\neg q)$, $q \wedge r$, $(\neg p) \wedge r$ et $s \wedge (\neg r)$. Compte tenu des valeurs de vérité conjointes de p, q, r, s, la matrice des valeurs de vérité de ces conjonctions est :

```
-->A // Reprise de la matice A ci-dessus
A =
1. 1. 0. 1.
1. 0. 0. 1.
0. 1. 1. 1.
0. 0. 1. 0.
// On écrit en ligne les valeurs de vérités des propositions ~q
, r,
~p , ~r
-->B=[0,1,0,1; 0,0,1,1; 0,0,1,1; 1,1,0,0]
B =
0. 1. 0. 0.
0. 0. 1. 1.
0. 0. 1. 1.
1. 1. 0. 0.
```

Pour calculer les valeurs de vérité des conjonctions, on effectue le produit d'Hadamard des matrices A et transposée de B.

```
-->A.*B'
ans =
0. 0. 0. 0.
1. 0. 0. 0.
0. 0. 1. 0.
1. 1. 1. 0.
```

On en déduit, par exemple, que la conjonction $(\neg p) \wedge r$ est vraie si, et seulement si, p est fausse, quelle que soit la valeur de vérité de r (3e colonne de la matrice $A.^{*}B'$)

Ecriture TF d'une matrice booléenne

L'écriture TF (True-False) d'une matrice booléenne est obtenue en remplaçant les 1 par %t et les 0 par %f. Pour convertir une matrice booléenne numérique en écriture TF, on effectue la conjonction de la matrice avec la matrice de même taille, ne possédant que des 1. Par exemple :

```
-->A
A =
1. 1. 0. 0.
1. 0. 1. 0.
0. 0. 1. 1.
1. 1. 1. 0.
// On a
-->ones(A)&A
ans =
T T F F
T F T F
F F T T
T T T F
// On a aussi
-->A&ones(A)
ans =
T T F F
T F T F
F F T T
T T T F
```

Exercice 1

1. Donner une écriture TF des matrices booléennes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Convertir en une matrice booléenne numérique les matrices

$$B_1 = \begin{pmatrix} \%t & \%t & \%f \\ \%f & \%f\% & \%t\% \\ \%t & \%f & \%f \end{pmatrix} \quad et \quad B_2 = \begin{pmatrix} \%t & \%t & \%f & \%f \\ \%f & \%t & \%f & \%t \\ \%t & \%f & \%f & \%t \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soient p et q deux propositions ; écrire dans SciNotes, un bloc d'instructions affichant dans la console :

```
Table de vérité de la négation d'une conjonction
La matrice B est [p, q, ~(p & q), ~p | ~q]
T T F F
T F T T
F F T T
F T T T
Table de vérité de la négation d'une disjonction
```

```
La matrice C est [p, q, ~(p | q), ~p & ~q]
T T F F
T F F F
F F T T
F T F F
```

Que constate-t-on ?

Exercice 3

Soit p, q et r trois propositions ; donner la négation de :

1. $(p \vee \neg q) \Rightarrow \neg(p \wedge \neg r)$

2. $p \Rightarrow \neg q$

3. $p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow \neg r)$

4. $\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg r$

Exercice 4

Parmi les propositions suivantes, dire lesquelles sont vraies ; donner leurs négations respectives. On donnera aussi les contraposées des implications :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y \geq 0$

2. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y \geq 0$

3. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y \geq 0$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y \geq 0$

Exercice 5

Soit (u_n) une suite. Écrire à l'aide de quantificateurs chacune des propositions suivantes, puis donner l'exemple d'une telle suite pour chacune d'elle.

1. (u_n) est croissante.

2. (u_n) est majorée.

3. La suite prend toutes les valeurs entières.

Corrigé exercice 1

1. Immédiatement

```
-->A1=[1,0,1; 1,1,0; 0,1,0]
A1 =
1. 0. 1.
1. 1. 0.
0. 1. 0.
-->A1=ones(A1)&A1
A1 =
T F T
T T F
F T F
-->A2=[1,0,0; 0,1,1; 1,1,0; 0,0,1]
A2 =
1. 0. 0.
0. 1. 1.
1. 1. 0.
0. 0. 1.
-->A2=ones(A2)&A2
A2 =
T F F
F T T
T T F
F F T
```

2. On a aussi :

```
-->B1=[%t,%t,%f; %f,%f,%t; %t,%f,%f]
B1 =
T T F
F F T
T F F
-->B1=bool2s(B1)
B1 =
1. 1. 0.
0. 0. 1.
1. 0. 0.
-->B2=[%t,%t,%f,%f; %f,%t,%f,%t; %t,%f,%f,%t]
B2 =
T T F F
F T F T
T F F T
-->B2=bool2s(B2)
B2 =
1. 1. 0. 0.
0. 1. 0. 1.
1. 0. 0. 1.
```

Corrigé exercice 2

Dans la première table de vérité, on vérifie que $\neg(p \wedge q)$ a même valeur de vérité que $(\neg p) \vee (\neg q)$; dans la seconde, on vérifie que $\neg(p \vee q)$ a même valeur de vérité que $(\neg p) \wedge (\neg q)$.
Par exemple :

```
clc // Effaçage de la console
```

```
disp("Table de vérité de la négation d''une conjonction")
disp("La matrice B est [p, q, ~(p & q), ~p | ~q]")
A=[%t %t; %t %f];
A=[A; ~A]
B=[A, ~(A(:,1)&A(:,2)), ~A(:,1)|~A(:,2)]
disp(B)
disp("")
disp("Table de vérité de la négation d''une disjonction")
disp("La matrice C est [p, q, ~(p | q), ~p & ~q]")
C=[A, ~(A(:,1)|A(:,2)), ~A(:,1)&~A(:,2)]
disp(C)
```

La négation d'une conjonction est la disjonction des négations et la négation des disjonctions est la conjonction des négations. Ce sont les lois de de Morgan.

Corrigé exercice 3

1. $\neg\big((p\vee\neg q)\Rightarrow\neg(p\wedge\neg r)\big)$ est équivalente à $\neg\big(\neg(p\vee\neg q)\vee\neg(p\wedge\neg r)\big)$, équivalente à $(p\vee\neg q)\wedge(p\wedge\neg r)$

2. $\neg(p\Rightarrow\neg q)$ est équivalente à $p\wedge q$
3. $\neg\big(p\Rightarrow\neg(q\Rightarrow\neg r)\big)$ est équivalente à $p\wedge(q\Rightarrow\neg r)$
4. $\neg\big(\neg(p\wedge q)\Rightarrow\neg r\big)$ est équivalente à $\neg\big(r\Rightarrow(p\wedge q)\big)$, équivalente à $r\wedge\neg(p\wedge q)$, équivalente à $r\wedge(\neg p\vee\neg q)$

Corrigé exercice 4

1. Proposition vraie (il suffit de prendre $y=-x$)

- négation : $\exists x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ x+y<0$

2. Proposition fausse

- négation : $\forall x\in\mathbb{R},\ \exists y\in\mathbb{R},\ x+y<0$

3. Proposition vraie (il suffit de prendre $x=y=0$)

- négation : $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ x+y<0$

4. Proposition fausse

- négation : $\exists x\in\mathbb{R},\ \exists y\in\mathbb{R},\ x+y<0$

Corrigé exercice 5

1. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq u_{n+1}$; par exemple $(u_n)=(n)$

2. $\exists M\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq M$; par exemple $(u_n)=\left(\frac{1}{n+1}\right)$ et $M=1$

3. $\forall k\in\mathbb{Z},\ \exists n\in\mathbb{N},\ u_n=k$; par exemple (u_n) : $u_n=\begin{cases}-k & \text{si } n=3k\\ k & \text{si } n=3k+1\\ \sqrt{k} & \text{si } n=3k+2\end{cases}$

■ Chapitre 4 – Ensembles et cardinaux

Exercice 1
Soit E un ensemble non vide. On considère une partie A de E et les applications f_A et g_A de dans $\mathcal{P}(E)$ telles que, pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$,

$$f_A(X) = X \cap A \text{ et } g_A(X) = X \cup A$$

1. Montrer que l'application f_A est-elle injective si, et seulement si, f_A est bijective. Que peut-on alors dire de g_A ?
2. Montrer que l'application g_A est-elle injective si, et seulement si, g_A est bijective. Que peut-on alors dire de f_A ?

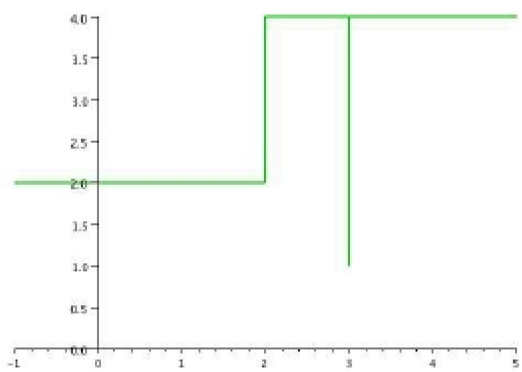
Exercice 2
Soit E un ensemble.
1. Soit f une application de E dans $\mathcal{P}(E)$ et $A = \{x \in E \,/\, x \notin f(x)\}$. Montrer qu'il n'existe pas d'élément a de E tel que $f(a) = A$.
2. En déduire qu'il n'existe aucune surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Chemins monotones
L'instruction `plot2d2` construit des lignes brisées ; soit
$x = [x(1), x(2), \text{K}, x(n)]$ et $y = [y(1), y(2), \text{K}, y(n)]$
`plot2d2(x,y)`renvoie la ligne brisée dont les extrémités sont $(x(1), y(1))$; $(x(2), y(1))$; $(x(2), y(2))$; $(x(3), y(2))$…

Par exemple, taper sur la console :

```
-->x=[-1,2,5,3]; y=[2,4,4,1];
-->clf()
-->plot2d2(x,y,15); a=gca(); a.x_location="origin";
a.y_location=
"origin"; a.children(1).children(1).thickness=2
```

On obtient la ligne brisée :
(–1, 2) , (2, 2) , (2, 4) , (5, 4) , (5, 4) , (3, 4) , (3, 1)
soit



Dans l'instruction `plot2d2`, 15 est le code de la couleur verte obtenue. On utilisera l'instruction `plot2d2` pour la construction de chemins monotones. L'exercice suivant donne la définition et un programme pour leur représentation.

Exercice 3

Un chemin monotone de taille n est une application caractéristique (ou indicatrice) définie sur $[\![0, n-1]\!]$ ou sur $[\![1, n]\!]$. Par exemple,
$s = (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$ est un chemin monotone de taille 9 ; cette 9-liste est une application de $[\![0, N8]\!]$ dans $\{0, 1\}$ qu'on représentera graphiquement par une ligne brisée $OA_0A_1A_2\ldots A_8$ tel que,

- $A_0\left(s(0), 1-s(0)\right)$, c'est-à-dire $A_0(1,0)$
- pour $i \geq 1$, $A_i(x_i, y_i)$ $x_i = x_{i-1} + s(i)$ et $y_i = y_{i-1} + 1 - s(i)$

On convient de dire qu'un chemin monotone est d'extrémité le point de coordonnées (a, b) si sa représentation graphique est la ligne brisée $OA_0A_1A_2\ldots A_{a+b}$ telle que A_{a+b} a pour coordonnées (a, b).

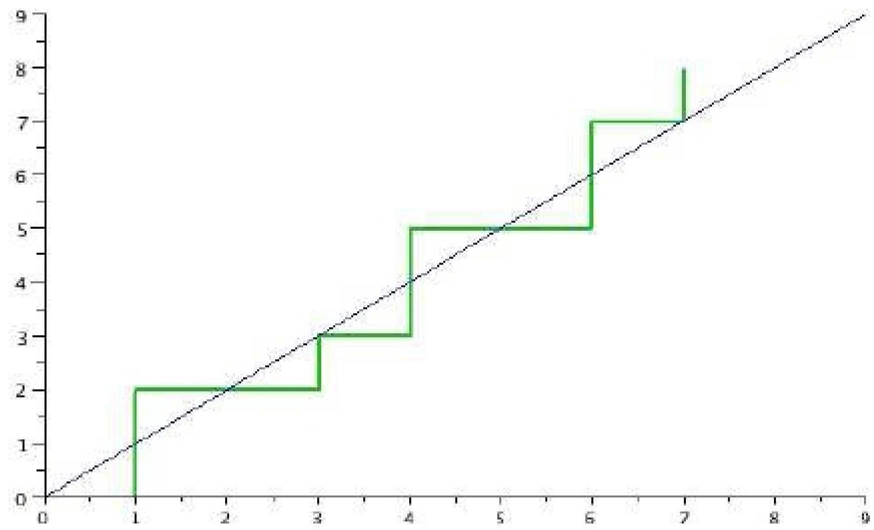
1. Effectuer le programme suivant :

```
clf() // Effaçage des figures
disp("Simulation d''un chemin monotone")
n=input("Nombre total de pas : ")

x=floor(2*rand(1,n))    // matrice des déplacements horizontaux
y=1-x   // matrice des déplacements verticaux
X=zeros(x); Y=zeros(y);
for k=1:n
     X(k)=sum(x(1:k))
     Y(k)=sum(y(1:k))
end
M=max(X(n),Y(n))
b=[0:M+1]

plot2d2(X,Y,15)
a=gca()
a.x_location="origin"
a.y_location="origin"
a.children(1).children(1).thickness=2
plot2d(b,b,2)
```

Sur la console on prend n=15 ; on obtient :

```
 Simulation d'un chemin monotone
Nombre total de pas : 15
-->x
 x   =
     1.   0.   0.    1.   1.  0.    1.   0.   0.   1.   1.
0.     0.   1.   0.
-->y
 y   =
     0.   1.    1.   0.   0.   1.   0.   1.   1.   0.   0.
1.     1.    0.   1.
```

La représentation graphique est :



2. Combien y-a-t-il de chemins monotones de 15 pas ?
3. Utiliser la première question pour déterminer le nombre de chemins monotones dont l'extrémité est le point de coordonnées (7, 8) ?

Vérifier qu'il s'agit du nombre $\begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}$. Justifier que $\begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Soit a et b deux entiers naturels. Sans démonstration, donner le nombre de chemins monotones dont l'extrémité est le point de coordonnées (a, b).

Que peut-on dire des nombres $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$ pour $0 \leq k \leq n$?

4. Combien y-a-t-il de chemins monotones dont l'extrémité est le point de coordonnées (7, 8) et passant par le point de coordonnées (4, 3) ?
5. Soit n un entier naturel non nul. Justifier l'égalité :

$$\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{a} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2$$

Corrigé exercice 1

1. Si f_A est injective, alors $f_A(X) = \varnothing \Leftrightarrow X = \varnothing$. Il s'ensuit que $\overline{A} = \varnothing$ et par suite $A = E$.

Réciproquement, si $A = E$, pour tout élément $X \in \mathcal{P}(E)$, on a $X \cap A = X \cap E = X$; il s'ensuit que f_A est injective.
On vient de montrer que f_A est injective si, et seulement si, f_A est l'identité ; il s'ensuit que f_A est
injective si, et seulement si, f_A est bijective.
On notera aussi que dans ce cas, g_A est constante : pour tout élément $X \in \mathcal{P}(E)$,
$g_A(X) = X \cup A = X \cup E = E$.

2. Si g_A est surjective, il existe un élément $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $g_A(X) = \varnothing$, c'est-à-dire $A \subset X \cup A = \varnothing$; il en résulte que $A \subset \varnothing$ et donc $A = \varnothing$. Réciproquement, si $A = \varnothing$, pour tout élément $X \in \mathcal{P}(E)$, $X \cup A = X \cup \varnothing = X$; donc g_A est surjective.
On vient de montrer que g_A est injective si, et seulement si, g_A est l'identité ; il s'ensuit que g_A est injective si, et seulement si, g_A est bijective.
On notera que dans ce cas, f_A est constante : pour tout élément $X \in \mathcal{P}(E)$, $f_A(X) = X \cap A = X \cap \varnothing = \varnothing$.

Corrigé exercice 2

1. Supposons qu'il existe un élément $a \in E$ tel que $f(a) = A$; si $a \in A$ alors $a \notin f(a) = A$ ce qui est contradictoire. On en déduit donc que $a \notin A = f(a)$; par définition de A, si $a \notin f(a)$ alors $a \in A = f(a)$; là encore on a une contradiction. Il n'existe aucun élément a de E tel que $f(a) = A$.

2. C'est une conséquence immédiate de la question précédente. Soit f une application de E dans $\mathcal{P}(E)$; $A = \{x \in E \,/\, a \notin f(a)\}$ n'a pas d'antécédent par f ; donc f n'est pas surjective.

Corrigé exercice 3

1. Laissé au soin du lecteur.
2. À chaque pas, il y a deux possibilités ; il y a donc en tout 2^{15} chemins monotones possibles
3. Avec Scilab.
Pour représenter graphiquement un chemin monotone aléatoire d'extrémité le point de coordonnées (7, 8), on va d'abord déterminer la matrice x des déplacements horizontaux ; on écrit la matrice x1= [ones(1,7), zeros(1,8)] d'un tel déplacement. Tout autre déplacement horizontal x est une permutation des termes de cette matrice.
À chacune des matrices x, correspond un et un seul chemin monotone et réciproquement, à tout chemin monotone d'extrémité le point de coordonnées (7, 8) correspond une et une seule matrice x.
Le nombre de chemins monotones d'extrémité le point de coordonnées (7, 8) est donc le nombre de permutations des termes de la matrice x1.
Pour calculer ce nombre, on va d'abord considérer tous les termes comme distincts ; en d'autres termes, on affecte une couleur (ou un indice) à chaque 1 et à chaque 0. Dans ce cas, il y a 15! permutations des termes de la matrice.
Supprimons les couleurs ; toutes les permutations échangeant des couleurs pour un même nombre donnent la même matrice de déplacements horizontaux. Or, le nombre de permutations échangeant les couleurs des 1 est 7! , et le nombre de permutations échangeant les couleurs des 0 est 8!. Il s'ensuit que le nombre de matrices distinctes de déplacements horizontaux, ou nombre de chemins monotones d'extrémité le point de coordonnées (7, 8) est

$$\binom{15}{7} = \frac{15!}{7! \times 8!}$$

Généralisation
Avec le même raisonnement, le nombre de chemins monotones d'extrémité le point de coordonnées (a, b) est

$$\binom{a+b}{a} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!}$$

Les nombres $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{n-k}$ sont respectivement les nombres de chemins monotones d'extrémités les points de coordonnées $(k, n-k)$ et $(n-k, k)$; ils sont égaux car les chemins monotones d'extrémité le point de coordonnées $(n-k, k)$ sont les symétriques par rapport à la première bissectrice des chemins monotones d'extrémité le point de coordonnées $(k, n-k)$.
On a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4. Avec Scilab.
La représentation graphique d'un chemin monotone aléatoire d'extrémité le point de coordonnées (7, 8) et passant par le point de coordonnées (4, 3) est entièrement déterminé par sa matrice x de déplacements horizontaux. Cette matrice est de la forme x=[x1 , x2] où x1 est une matrice des déplacements horizontaux d'un chemin monotone d'extrémité le point de coordonnées (4, 3) et x2 la matrice des déplacements horizontaux d'un chemin monotone joignant les points d'extrémités (4, 3) et (7, 8).
D'après la question précédente, il y a $\binom{7}{4}$ chemins x1 possibles et $\binom{8}{3}$ chemins x2 possibles ; il y a donc en tout $\binom{7}{4} \times \binom{8}{3}$ chemins monotones d'extrémité le point de coordonnées (7, 8) et passant par le point de coordonnées (4, 3).

5. Le nombre $\binom{2n}{n}$ est le nombre de chemins monotones de taille 2 *n*, d'extrémité le point de coordonnées (*n*, *n)*. Tout chemin monotone de cette famille, est la réunion d'un chemin monotone d'extrémité le point de coordonnées (*n*, *n*), passant par un point de coordonnées $(k, n-k)$ pour une valeur de *k* de $[\![0, n]\!]$. En utilisant le même raisonnement que dans la question précédente, le nombre de ces chemins est $\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$. Il en résulte que le nombre de chemins monotones d'extrémité le point de coordonnées (*n*, *n*) est donné par :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

■ Chapitre 5 – Matrice

Exercice 1
Soient a et b deux réels, on considère la matrice

$$J(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice J^n pour tout entier naturel n.

Exercice 2

On considère les matrices A et B :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; A^n = a_n I + b_n B.$$

2. En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

Exercice 3 – D'après Ecricome 2011

Partie I

On considère les matrices :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Et on pose $A = \Delta + N$.

1. Calculer N^2 puis en déduire N^k ou k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

2. (a) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.

(b) Vérifier que : $P^{-1}\Delta P = D$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Exprimer Δ en fonction de P, D et P^{-1}.

(d) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \; \Delta^n = PD^n P^{-1}$.

(e) Exprimer Δ^n sous forme d'un tableau de nombres.

3. (a) Vérifier que $\Delta N = N\Delta$.

(b) En utilisant la formule du binôme de Newton pour les matrices, exprimer A^n en fonction de Δ, N et n.

(c) En déduire l'expression de A^n sous la forme d'un tableau de nombres.

Partie II

Dans cette partie, nous allons étudier les trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} = -2x_n + 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}$$

1. (a) En utilisant la définition de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer directement la valeur de z_n.

(b) Ecrire alors x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2. On introduit la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $r_n = x_n + y_n$ pour tout entier naturel n.

(a) Etablir que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et préciser sa raison.

(b) En déduire l'expression de $x_n + y_n$ en fonction de n.

3. On introduit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = 2x_n + y_n$ pour tout entier naturel n.

(a) Prouver que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison.

(b) En déduire l'expression de $2x_n + y_n$ en fonction de n.

4. En utilisant les questions 2 et 3, déterminer x_n et y_n en fonction de n.

Corrigé exercice 1

Soient a et b deux réels, on considère la matrice

$$J(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

On commence par calculer au brouillon J^2 et J^3 de manière à formuler une conjecture que l'on démontre ensuite par un raisonnement par récurrence.

Pour $n = 0$, d'après le cours, $J^0 = I$.

Pour n entier naturel non nul, on pose

$$P_n = J(a,b)^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

La propriété est vérifiée de manière immédiate pour $n = 1$.
Soit n un entier naturel non nul tel que P_n. On a alors :

$$J(a,b)^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$$

Par suite,

$$J(a,b)^{n+1} = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$$

Soit, en effectuant le produit matriciel :

$$J(a,b)^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n & 0 \\ 0 & a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ce qui établit la propriété au rang $n + 1$ et achève ainsi le raisonnement par récurrence.

Corrigé exercice 2

On considère les matrices A et B :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Cette question, très classiques, se traite à l'aide d'un raisonnement par récurrence ; on peut remarquer dès le début qu'on a $A = I + B$.

On pose, pour n entier naturel, P_n : « Il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nI + b_nB$ ».
Pour $n = 0$, comme d'après le cours, $A^0 = I$, il suffit de poser $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ pour pouvoir écrire $A^0 = a_0I + b_0B$, ce qui établit P_0.
Il existe alors deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nI + b_nB$; on multiplie par A :

$$A^{n+1} = a_nA + b_nBA$$

Or, un calcul élémentaire montre que $BA = 2B$ et nous avons remarqué que $A = I + B$.

En remplaçant dans l'égalité ci-dessus, il vient :

$$A^{n+1} = a_nI + (a_n + 2b_n)B$$

En posant $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$, on peut alors écrire A^{n+1} sous la forme $a_{n+1}I + b_{n+1}B$, ce qui établit la propriété au rang $n + 1$ et achève le raisonnement par récurrence.

2. Il s'agit dans cette question de déterminer les termes généraux des suites (a_n) et (b_n) définies dans la question précédente.

On remarque, que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = a_n$; on en déduit que la suite (a_n) est constante et, comme on connaît a_0, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 1$$

Il en résulte que la suite (b_n) vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = 2b_n + 1$$

La suite (b_n) est donc une suite arithmético-géométrique. On applique le protocole classique pour déterminer le terme général d'une telle suite.

On commence par chercher le point fixe L tel que $L = 2L + 1$; on trouve $L = -1$.
On considère alors la suite (u_n) définie pour tout naturel n par $u_n = b_n - L$.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n$. On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $(u_0) = b_0 + 1 = 1$.

On peut alors déterminer le terme général de la suite (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 2^n = 2^n$$

Par suite, on déduit le terme général de la suite (b_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 2^n - 1$$

On peut alors en conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = I + (2^n - 1)B$$

Corrigé exercice 3 - D'après Ecricome 2011
Partie I

On considère les matrices :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Et on pose $A = \Delta + N$.

1. Le calcul donne $N^2 = 0$.

On peut donc en déduire pour tout $n \geq 2$, $N^k = N^2 N^{k-2} = 0$.

On dit que N est une matrice nilpotente d'indice 2.

2. (a) En appliquant la démarche exposée dans le corrigé méthodologique du sujet A, on obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Il suffit d'effectuer le produit matriciel pour trouver le résultat demandé.

(c) En multipliant les deux membres de l'égalité par P à gauche et P^{-1} à droite, on obtient :

$$\Delta = PDP^{-1}$$

(d) Ce raisonnement par récurrence figure à l'identique dans le corrigé méthodologique du sujet A.

(e) On effectue le produit PD^nP^{-1} et on trouve :

$$\Delta^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (a) Calcul sans difficulté, on obtient :

$$\Delta N = N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) On a vu dans la question précédente que les matrices Δ et N commutent donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton pour calculer la matrice A^n.

Etant donné que la matrice N est nilpotente d'indice 2, seuls les deux premiers termes de la formule subsistent et on a, après calcul des coefficients binomiaux :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \Delta^n + n\,\Delta^{n-1}N; \;\; A^0 = I$$

On notera cependant que la formule ci-dessous s'étend au cas où $n = 0$.

(c) Après calcul, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & -n \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie II

Dans cette partie, nous allons étudier les trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \; \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} = -2x_n + 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}$$

1. (a) La suite (z_n) est une suite constante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = z_0 = 1$$

(b) Ecrire alors, x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n. En remplaçant dans les formules du texte, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = 3x_n + y_n - 1; \; y_{n+1} = -2x_n + 2$$

2. (a) Pour tout entier naturel n, $r_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = x_n + y_n + 1$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, r_{n+1} = r_n + 1.$$

La suite (r_n) est arithmétique de raison 1 et de premier terme $r_0 = 2$.

(b) D'après le cours,

$$\forall n \in \mathbb{N}, r_n = 2 + n.$$

3. On introduit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = 2x_n + y_n$ pour tout entier naturel n.

(a) Pour tout entier naturel n, $s_{n+1} = 2(3x_n + y_n - 1) - 2x_n + 2 = 2s_n$.

On en déduit que la suite (s_n)est géométrique de raison 2 et de premier terme $s_0 = 3$.

(b) D'après le cours, $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = 2x_n + y_n = 3(2)^n$.

4. En utilisant les questions 2 et 3, déterminer $x_n$et y_n en fonction de n.

Retrouver ce résultat en utilisant la partie I.

D'après les questions précédentes,

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = s_n - r_n = 3(2)^n - n - 2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = r_n - x_n = 2n + 4 - 3(2)^n$$

On peut retrouver ces résultats en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

On commence par prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$, puis on montre par que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$.

En utilisant la matrice A^n trouvée dans la partie I et en effectuant le produit matriciel $A^n U_0$, on retrouve les valeurs de $x_n$et y_n obtenues précédemment.

Exercice 1
Résoudre le système linéaire suivant :
1.

$$\begin{cases} 2x+3y &= 4 \\ 3x+7y &= 0 \\ 4x+7y &= 1 \end{cases}$$

Exercice 2
Résoudre le système linéaire suivant ; on discutera selon la valeur du paramètre m.
1.

$$\begin{cases} -mx+2y+2z &= 0 \\ 2x-my-z &= 0 \\ x+y+mz &= 0 \end{cases}$$

Exercice 3
Pour quelles valeurs du paramètre m le système suivant n'est-il pas un système de Cramer ? On donnera l'ensemble des solutions du système dans chacun des cas.

$$\begin{cases} (3-m)x-2y &= 0 \\ 2x-my-4z &= 0 \\ y-(3+m)z &= 0 \end{cases}$$

Exercice 4
Résoudre les systèmes suivants :
1.

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 10 \\ x^2-y^2 &= 8 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x^2+y^2 &= 2 \\ x^2-2y^2 &= -9 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} &= \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y} &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Corrigé exercice 1

1.

$$\begin{cases} 2x+3y &= 4 \\ 3x+7y &= 0 \\ 4x+7y &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y &= 4 \\ -5y &= 12L_2 \leftarrow 3L_1 - 2L_2 \\ -y &= 7L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{cases}$$

On voit clairement que les deux dernières équations sont incompatibles ; ce système n'admet aucune solution.

Corrigé exercice 2

1.
$$\begin{cases}-mx+2y+2z &= 0\\ 2x-my-z &= 0\\ x+y+mz &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-my-z &= 0 & L_1 \leftrightarrow L_2\\ -mx+2y+2z &= 0\\ x+y+mz &= 0\end{cases}$$

Ces systèmes sont équivalents à :

$$\begin{cases}2x-my-z &= 0\\ (4-m^2)y+(4-m)z &= 0 & L_2 \leftarrow mL_1+2L_2\\ (-m-2)y+(-1-2m)z &= 0 & L_3 \leftarrow L_1-2L_3\end{cases}$$

L'échange des lignes 2 et 3 permettra de limiter la discussion :

$$\begin{cases}2x-my-z &= 0\\ (-m-2)y+(-1-2m)z &= 0 & L_2 \leftrightarrow L_3\\ (4-m^2)y+(4-m)z &= 0\end{cases}$$

Si $m=-2$, le système admet une infinité de solutions : tous les triplets $(x,-x,0), x \in \mathbb{R}$.

Si $m \neq -2$, une dernière opération élémentaire transforme le système précédent en un système triangulaire équivalent :

$$\begin{cases}2x-my-z &= 0\\ (-m-2)y+(-1-2m)z &= 0\\ (m^2-m+2)z &= 0 & L_3 \leftarrow (2-m)L_2+L_3\end{cases}$$

On remarque que le coefficient de z ne s'annule jamais (trinôme du second degré dont le discriminant est strictement négatif) donc une nouvelle discussion selon les valeurs de m n'est pas nécessaire. Le système est alors un système de Cramer. Il admet pour unique solution $(0,0,0)$.

Corrigé exercice 3

On cherche les valeurs du paramètre m pour lesquelles le système (S) suivant n'est pas un système de Cramer. On commence donc par le transformer en un système triangulaire équivalent.

$$\begin{cases}(3-m)x-2y &= 0\\ 2x-my-4z &= 0\\ y-(3+m)z &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-my-4z &= 0 & L_1 \leftrightarrow L_2\\ (3-m)x-2y &= 0\\ y-(3+m)z &= 0\end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases}2x-my-4z &= 0\\ (m^2-3m+4)y-4(3-m)z &= 0 & L_2 \leftarrow (3-m)L_1-2L_2\\ y-(3+m)z &= 0\end{cases}$$

Afin de retarder la discussion, on échange les lignes L_2 et L_3 :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases}2x-my-4z &= 0\\ y-(3+m)z &= 0 & L_2 \leftrightarrow L_3\\ (m^2-3m+4)y-4(3-m)z &= 0\end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - my - 4z & = & 0 \\ y - (3+m)z & = & 0 \\ (m - m^3)z & = & 0 L_3 \leftarrow (m^2 - 3m + 4)L_2 - L_3 \end{cases}$$

Le système obtenu est triangulaire ; ce n'est pas un système de Cramer si et seulement si au moins un des coefficients diagonaux est nul, donc si et seulement si $m - m^3 = 0$.

Il existe donc trois valeurs de m pour lesquelles le système (S) n'est pas de Cramer : 0, 1 et -1.

Si $m = 0$, alors le système admet une infinité de solutions, tous les triplets $(2z, 2z, z), z \in \mathbb{R}$.

Si $m = 1$, alors le système admet une infinité de solutions, tous les triplets $(4z, 4z, z), z \in \mathbb{R}$.

Si $m = -1$, alors le système admet une infinité de solutions, tous les triplets $(z, 2z, z), z \in \mathbb{R}$.

Corrigé exercice 4

Les systèmes proposés dans cet exercice ne sont pas des systèmes linéaires ; un changement d'inconnues va permettre de se ramener à un système linéaire qui sera ensuite résolu par la méthode du pivot de Gauss. Dans une dernière étape, on reviendra au système initial pour en donner les solutions

1.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = & 10 \\ x^2 - y^2 & = & 8 \end{cases}$$

On pose $X = x^2,\ Y = y^2$.

Le système (S) est alors transformé en (S') :

$$\begin{cases} X + Y & = & 10 \\ X - Y & = & 8 \end{cases}$$

Le système (S') est linéaire. On résout (S') :

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y & = & 10 \\ 2Y & = & 2L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \end{cases}$$

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} X & = & 9 \\ Y & = & 1 \end{cases}$$

On revient alors au système initial (S) :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 & = & 9 \\ y^2 & = & 1 \end{cases}$$

Le système (S) admet quatre couples solution : (3, 1) ; (-3, 1) ; (3, -1) ; (-3, -1).

2. On procède de la même manière pour ce système :

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 & = & 2 \\ x^2 - 2y^2 & = & -9 \end{cases}$$

On pose $X = x^2,\ Y = y^2$.

Le système (S) est alors transformé en (S') : $\begin{cases} 2X + Y & = & 2 \\ X - 2Y & = & -9 \end{cases}$

Le système (S') est linéaire. On résout (S') :

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} 2X + Y & = & 2 \\ 5Y & = & 20 L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \end{cases}$$

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} X & = & -1 \\ Y & = & 4 \end{cases}$$

On revient alors au système initial (S) : $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 & = & -1 \\ y^2 & = & 4 \end{cases}$

La première équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc le système (S) n'a pas de solution.

3.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} & = & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} & = & \frac{1}{2} \end{cases}$$

On pose $X = \frac{1}{x},\ Y = \frac{1}{x}. x \neq 0,\ y \neq 0$

Le système (S) est alors transformé en (S') : $\begin{cases} X + Y & = & \frac{3}{2} \\ 2X - 3Y & = & \frac{1}{2} \end{cases}$

Le système (S') est linéaire. On résout (S') :

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y & = & \frac{3}{2} \\ 5Y & = & \frac{5}{2} L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \end{cases}$$

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} X & = & 1 \\ Y & = & \frac{1}{2} \end{cases}$$

On revient alors au système initial (S) :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} & = & 1 \\ \frac{1}{y} & = & \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le système (S) admet un unique couple de solution (1,2).

Exercice 1
On considère la suite (S_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}.$$

1. Montrer par un calcul directe que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{n+1}{2n}$.

2. Retrouver ce résultat à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

3. Etudier le sens de variation de la suite (S_n).

4. La suite (S_n) est-elle bornée ?

Exercice 2
1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 3^n \geq n^2(n-1)$.

2. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k}.$$

Etudier les variations de la suite (u_n).

3. Montrer par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad k - \left(\frac{3}{2}\right)^k \leq 0.$$

4. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{k}{3^k} \leq \frac{1}{2^k}$$

5. En déduire un majorant de la suite (u_n).

6. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

En utilisant la question 1, montrer que (u_n) est décroissante.

7. Que peut-on en déduire pour les suites (u_n) et (v_n) ?

Exercice 3
On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n = \frac{1}{n}(n!)^{1/n}\ ; \qquad w_n = \frac{n^n}{n!}$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \ln w_n = -n \ln u_n$$

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

3. Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \forall x > 0,\ \ (1+x)^n \geq 1 + nx$$

4. Montrer que

$$\forall n \geq 6, \qquad w_n \geq 2^n$$

5. En déduire $\lim_{n\to+\infty} w_n$

6. Donner un majorant de la suite (u_n).

Exercice 4
On considère la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n = \sum_{k=1}^{n} e^{1/k}$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Corrigé exercice 1

On considère la suite (S_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

1.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

On peut alors utiliser la formule du cours donnant la somme des *n* premiers entiers naturels :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ S_n = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$$

Soit après simplification :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ S_n = \frac{n+1}{2n}$$

2. Pour tout entier naturel *n* non nul, on pose P_n: "$S_n = \frac{n+1}{2n}$".

Pour $n = 1, S_1 = 1$ et $\frac{1+1}{2} = 1$ ce qui établit P_1.

Soit n un entier naturel non nul tel que P_n.

On a alors $S_n = \frac{n+1}{2n}$. Or, $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(n+1)^2}$.

On transforme l'écriture S_{n+1} de manière à faire réapparaître celle de S_n :

$$S_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \frac{n+1}{n^2}\right]$$

$$S_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \left[\frac{n+1}{2n} + \frac{n+1}{n^2}\right]$$

$$S_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}$$

$$S_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

Ce qui établit P_{n+1}.

On a donc prouvé par un raisonnement par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n = \frac{n+1}{2n}$$

3. Etude du sens de variation de la suite (S_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_{n+1} - S_n = \frac{n+2}{2(n+1)} - \frac{n+1}{2n}$$

Après réduction au même dénominateur et simplification, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_{n+1} - S_n = -\frac{1}{2n(n+1)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_{n+1} - S_n \leq 0$$

La suite (S_n) est décroissante.

4. On peut déjà remarquer que la suite (S_n) est positive donc elle est minorée par 0. De plus, elle est décroissante donc elle est majorée par son premier terme $S_1 = 1$.
On en conclut que la suite (S_n) est bornée.

Corrigé exercice 2

1. Soit $n \geq 3$. On pose P_n : "$3^n \geq n^2(n-1)$ ".

Pour $n = 3$, on a $3^3 = 27$ et $3^2(3-1) = 18$; on a donc $3^3 \geq 18$ ce qui établit P_3.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 tel que P_n.

Sachant P_n, $3^n \geq n^2(n-1)$ donc, en multipliant les deux membres par 3 :

$$3^{n+1} \geq 3n^2(n-1)$$

On doit alors comparer $3n^2(n-1)$ et $n(n+1)^2$ par exemple en étudiant le signe de leur différence.

$$3n^2(n-1) - n(n+1)^2 = n(2n^2 - 5n - 1)$$

Le trinôme du second degré $2n^2 - 5n - 1$ admet deux racines distinctes dont l'une est strictement négative et l'autre est $\frac{5+\sqrt{33}}{4}$, de valeur approchée comprise entre 2 et 3. Ce trinôme est donc positif pour $n \geq 3$. Ceci explique pourquoi on a initialisé la récurrence à $n = 3$. Par suite, comme $n \geq 3$, $3n^2(n-1) - n(n+1)^2 \geq 0$ et, par transitivité de la relation d'ordre $3^{n+1} \geq n(n+1)^2$, ce qui établit P_{n+1}.

On a ainsi prouvé par un raisonnement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, \quad 3^n \geq n^2(n-1)$$

On vérifie ensuite que $3^0 \geq 0$, $3^1 \geq 0$ et $3^2 \geq 2^2$. On peut alors conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3^n \geq n^2(n-1)$$

2. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k}$$

On étudie les variations de la suite (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq 0$$

La suite (u_n) est croissante.

3. On commence par remarquer que la propriété est vérifiée de manière immédiate pour $k = 1$ et on se propose de la démontrer par récurrence pour $k \geq 2$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2$. On pose Q_k: "$k \leq \left(\frac{3}{2}\right)^k$ ".

Pour $k = 2$, on sait que $2 \leq \frac{9}{4}$ ce qui établit Q_2.

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que Q_k.

Sachant $Q_k, k \leq \left(\frac{3}{2}\right)^k$ donc $\frac{3}{2}k \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}$.

Il reste donc à comparer $k + 1$ et $\frac{3}{2}k$ soit $k + \frac{1}{2}k$.

Comme on travaille avec $k \geq 2$, on a $k + 1 \leq \frac{3}{2}k$ et, par transitivité de la relation d'ordre, $k + 1 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}$.

Ce qui établit Q_{k+1}.

On a ainsi prouvé par un raisonnement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, k - \left(\frac{3}{2}\right)^k \leq 0$$

4. Une simple transformation de la relation obtenue à la question précédente permet de conclure :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad k \leq \left(\frac{3}{2}\right)^k$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad k \leq \frac{3^k}{2^k}$$

On divise ensuite les deux membres par 3^k qui est strictement positif ; il vient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{k}{3^k} \leq \frac{1}{2^k}.$$

5. D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{k}{3^k} \leq \frac{1}{2^k}$$

On somme pour k variant de 1 à n :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

On reconnaît dans le membre de droite la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n \leq 1 - \frac{1}{2^n} \leq 1$$

La suite (u_n) est majorée par 1.

6. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ v_{n+1} - \ v_n = \ u_{n+1} - \ u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ v_{n+1} - \ v_n = \frac{n+1}{3^{n+1}} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ v_{n+1} - \ v_n = \frac{n(n+1)^2 - 3^{n+1}}{3^{n+1}(n)(n+1)}$$

Le dénominateur est clairement strictement positif ; et, d'après la question 1, le numérateur est négatif.
On en déduit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ v_{n+1} - \ v_n \leq 0.$$

La suite (v_n) est décroissante.

7. On a vu que la suite (u_n) était croissante (question 2) et que la suite (v_n) était décroissante.

De plus, $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

On peut donc en déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes ; elles convergent et ont la même limite.

Cependant, la convergence de la suite (u_n) pouvait être établie par le théorème de convergence monotone puisque la suite (u_n) est croissante et majorée par 1.

Corrigé exercice 3

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n = \frac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}; \quad w_n = \frac{n^n}{n!}.$$

1. On peut tout d'abord remarquer que les suites (u_n) et (w_n) sont bien définies et qu'elles ont tous leurs termes strictement positifs ce qui assure l'existence de $\ln u_n$ et de $\ln w_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln w_n = n \ln n - \ln n!$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln u_n = \ln \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \ln n!$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln u_n = -\ln\ n + \frac{1}{n} \ln n!$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -n \ln u_n = n \ln\ n - \ln n!$$

On peut donc conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln w_n = -n \ln u_n$$

2.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n}$$

On simplifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(\frac{(n+1)}{n}\right)^n$$

Soit finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

3. On démontre cette inégalité connue sous le nom d'inégalité de Bernoulli par récurrence :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose P_n : » $\forall x > 0, (1+x)^n \geq 1 + nx$ ».

Pour $n = 0$, $(1+x)^0 = 1$; on a donc $(1+x)^0 \geq 1$ ce qui établit P_0.

Soit n un entier naturel tel que P_n.

Sachant $P_n, \forall x > 0, (1+x)^n \geq 1 + nx$.

On multiplie les deux membres par $1 + x$ qui est positif :

$$\forall x > 0, (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$$

$$\forall x > 0, (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

Ce qui établit P_{n+1}.

On a ainsi prouvé par un raisonnement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, (1+x)^n \geq 1 + nx$$

4. Pour tout entier naturel $n \geq 6$, on pose Q_n : "$w_n \geq 2^n$ ".

Pour $n = 6, w_6 = \frac{6^6}{6!} = 64.8$ et $2^6 = 64$ $w_6 \geq 2^6$ ce qui établit Q_6.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 6 tel que Q_n.

On a alors $w_n \geq 2^n$ donc $2w_n \geq 2^{n+1}$.

Or, en appliquant le résultat de la question précédente avec $x = \frac{1}{n}$, il vient $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ et d'après la question 2, $w_{n+1} = w_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. On en déduit que $w_{n+1} \geq 2w_n$ et, par suite, $w_{n+1} \geq 2^{n+1}$, ce qui établit Q_{n+1}.

On a donc prouvé par un raisonnement par récurrence que :

$$\forall n \geq 6, w_n \geq 2^n.$$

5. On sait que $\forall n \geq 6, w_n \geq 2^n$. Par suite, $\ln w_n \geq n \ln 2$.

On exploite le résultat de la question 1 pour écrire :

$$\forall n \geq 6, -n \ln u_n \geq n \ln 2$$

$$\forall n \geq 6, \ln u_n \leq \ln \frac{1}{2}$$

D'où,

$$\forall n \geq 6, u_n \leq \frac{1}{2}$$

On remarque que $u_1 = 1$ et $u_2 < u_1$; on peut donc prendre comme majorant de (u_n), $M = \max(1, u_3, u_4, u_5)$.

On peut aussi déterminer une valeur approchée de ces termes pour déterminer lequel majore (u_n).

Corrigé exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} e^{1/k}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k} > 0$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad e^{1/k} > 1$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} e^{1/k} > \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} e^{1/k} > n$$

On peut conclure par le théorème de limite par comparaison que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

Exercice 1
Déterminer tous les polynômes P tels que

$$P'^2 = 4P$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P.

Exercice 2
Déterminer le réel a tels que les polynômes P et Q définis ci-dessous aient une racine commune :

$$P(X) = X^4 + aX + a$$
$$Q(X) = X^3 + aX + a$$

Corrigé exercice 1

Ce type de problème se résout en général par analyse-synthèse.
Supposons qu'il existe un polynôme non nul vérifiant l'égalité $P'^2 = 4P$. Soit n le degré de ce polynôme.

Si $n = 0$, alors P' est le polynôme nul donc on obtient $AP = 0$ et par suite P est le polynôme nul ; solution non recevable.
Si $n \geq 1$, alors comme $P' = 4P$, l'égalité des degrés conduit à l'équation $2(n-1) = n$ qui admet pour unique solution $n = 2$.
On peut donc conclure qu'il existe un polynôme P non nul tel que $P'^2 = 4P$, alors ce polynôme est de degré 2.
On pose donc $P(X) = aX^2 + bX + c$.
L'égalité $P'^2 = 4P$ conduit alors à :

$$(2aX + b)^2 = 4(aX^2 + bX + c)$$

$$P'^2 = 4P \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 & = & 4a \\ 4b & = & 4ab. \\ 4c & = & b^2 \end{cases}$$

On en déduit que les polynômes P vérifiant l'égalité $P'^2 = 4P$ sont, soit le polynôme nul, soit les polynômes de la forme $P(X) = X^2 + bX + \frac{1}{4}b^2, b \in \mathbb{R}$.

Corrigé exercice 2
On désigne par b la racine commune aux deux polynômes P et Q. On a alors :

$$P(b) = b^4 + ab + a = 0 \qquad Q(b) = b^3 + ab + a = 0$$

On peut donc en déduire que $b^4 = b^3$ soit $b^3(b-1) = 0$.
On en déduit que si b est une racine commune à P et Q, alors $b = 0$ ou $b = 1$.
On remplace alors dans l'égalité $P(b) = 0$ pour déterminer a :
• Si $b = 0$, alors $a = 0$ et $P(X) = X^4,\ \ Q(X) = X^3$. Ces polynômes ont une seule racine 0 qui de plus, leur est commune.

• Si $b = 0$, alors $a = -\frac{1}{2}$ et on a $P(X) = X^4 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$, $Q(X) = X^3 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$ qui ont 1 comme racine commune.

■ Chapitre 9 – Étude locale

Exercice 1
On pose :

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 3.

Exercice 2
On considère la fonction $f : x \mapsto (1-x^2)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Etudier la parité de la fonction f.
3. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en -1 et en 1.

Exercice 3
On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x-1}{x^3-x^2-x+1}$.
1. Préciser l'ensemble de définition de cette fonction.
2. Peut-on la prolonger par continuité en 1 ?
3. Préciser ses limites éventuelles en $+\infty$ et $-\infty$. Donner, si possible, une interprétation géométrique des résultats obtenus.

Corrigé exercice 1
On pose :

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

1. La fonction f est définie si et seulement si $x+1 \geq 0$ et $x-3 \neq 0$.
Son ensemble de définition est donc $[-1;3[\cup]3;+\infty[$.

2. On remarque que la fonction f est continue sur $[-1;3[$ et sur $]3;+\infty[$. On étudie sa limite en 3 :

$$\forall x \in [-1;3[\cup]3;+\infty[, \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$\forall x \in [-1;3[\cup]3;+\infty[,\ f(x) = \frac{1}{(\sqrt{x+1}+2)}.$$

L'indétermination est ainsi levée et on peut conclure :

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{1}{4}.$$

La fonction f est prolongeable par continuité en 3. On définit alors la fonction $\tilde{f}$ par $\tilde{f} = f$ sur $[-1;3[$ et sur $]3;+\infty[$; $\tilde{f}(3) = \frac{1}{4}$.

Corrigé exercice 2
On considère la fonction $f : x \mapsto (1-x^2)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

1. La fonction f est définie pour tous les réels x tels que $\frac{1+x}{1-x} > 0$. On peut étudier le signe de ce quotient à l'aide d'un tableau de signe ou en remarquant qu'il est de même signe que le produit $(1+x)(1-x)$.

$$\frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

On peut alors conclure : $D_f = \left]-1\,;1\right[$.

2. On remarque tout d'abord que :

$$\forall x \in]-1;1[, -x \in]-1;1[$$

$$\forall x \in]-1;1[, f(-x) = (1-x^2)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

D'après les propriétés de la fonction ln :

$$\forall x \in]-1;1[, f(-x) = -(1-x^2)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\forall x \in]-1;1[, f(-x) = -f(x)$$

On peut en déduire que la fonction f est impaire.

3. La fonction f étant impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées ; on peut donc limiter son intervalle d'étude à $[0;1[$. En conséquences, il suffit d'étudier cette fonction en 1.

On transforme l'écriture de $f(x)$ de manière à lever les indéterminations dans les calculs de limites :

$$\forall x \in]-1;1[, f(x) = (1-x^2)\ln(1+x) - (1+x)(1-x)\ln(1-x)$$

$$\lim_{x\to 1}(1-x^2)\ln(1+x) = 0$$

$$\lim_{x\to 1-}(1-x) = 0^+; \quad \lim_{X\to 0^+} X\ln X = 0$$

Donc, par composition :

$$\lim_{x\to 1-}(1-x)\ln(1-x) = 0$$

Et finalement :

$$\lim_{x\to 1}[(1-x^2)\ln(1+x) - (1+x)(1-x)\ln(1-x)] = 0$$

La fonction f est prolongeable par continuité en -1 et en 1. On définit la fonction $\tilde{f}$ par $\tilde{f} = f$ sur $]-1;1[$; $\tilde{f}(1) = \tilde{f}(-1) = 0$.

Corrigé exercice 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x-1}{x^3-x^2-x+1}$.

1. La fonction f est définie pour tous les réels x tels que $x^3 - x^2 - x + 1 \neq 0$.

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) - (x-1) = 0$$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-1) = 0$$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

Ainsi, $D_f = \left]-\infty\,; -1\right[\cup \left]-1\,; 1\right[\cup \left]\,1; +\infty\right[$.

2.

$$\forall x \in \left]-\infty; -1\right[\cup \left]-1\,; 1\right[\cup \left]\,1; +\infty\right[, f(x) = \frac{x-1}{(x-1)(x^2-1)}$$

$$\forall x \in \left]-\infty; -1\right[\cup \left]-1\,; 1\right[\cup \left]\,1; +\infty\right[, f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.$$

La fonction f n'est pas prolongeable par continuité en 1. La courbe représentative de f admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale.

3. On travaille avec la forme simplifiée obtenue à la question précédente :

$$\forall x \in \left]-\infty; -1\right[\cup \left]-1\,; 1\right[\cup \left]\,1; +\infty\right[, f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$$

On peut en déduire que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

■ Chapitre 10 – Étude globale

Exercice 1
Donner un exemple de bijection strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1, 1[$. Peut-on trouver une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans [1, 1] ?

Exercice 2
1. Donner un exemple d'une fonction bijective de [0, 1] dans [0, 1] et discontinue en tout point.
2. Donner un exemple de fonction discontinue en tout point de $\mathbb{R}$ telle que $|f|$ soit continue

---

Corrigé Exercice 1
► Donnons un exemple en lien avec les probabilités. Peut-être certains ont-ils déjà entendu parler de la loi exponentielle ; elle sera étudiée un peu plus loin dans le programme.
On peut considérer la fonction impaire définie par $x \mapsto 1-\mathrm{e}^{-x}$ si x est positif. Elle s'écrit donc

$$f(x)=\begin{cases}-1+e^{x} & si\ x\le 0\\ 1-e^{-x} & si\ x\ge 0\end{cases}$$

On vérifie que cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans]1, 1[:

- si $x < 0$, alors $0<\mathrm{e}^{x}<1$ et donc $f(x)=-1+\mathrm{e}^{x}\in\,]-1,0[$; si $x > 0$, alors $0<\mathrm{e}^{-x}<1$ et donc $f(x)=1-\mathrm{e}^{-x}\in\,]0,1[$; il s'ensuit que si x et y sont deux réels tels que $x < 0 < y$ alors $-1<f(x)<0<f(y)<1$
- si x et y sont deux réels tels que $x<y\le 0$ alors, par croissance de l'exponentielle, $f(x) < f(y)$; si x et y sont deux réels tels que $0\le x<y$ alors, par décroissance de la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{-x}$ et donc la croissance de $x\mapsto -\mathrm{e}^{-x}$, $f(x) < f(y)$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans]-1, 1[.
► **Non**. Il n'existe pas de bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans [-1, 1] .
Par l'absurde, si une telle fonction existe, il existe un réel a tel que $f(a) = 1$; comme f est strictement croissante, pour tout réel $x > a$, $f(x) > f(a)$ c'est-à-dire $f(x) > 1$ ce qui est impossible. Donc une telle bijection n'existe pas.

Corrigé Exercice 2
1. On considère la fonction f définie par

$$f(1)=0 \quad \text{et} \quad f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2} & si\ x\in\mathbb{Q}\ ,\ 0\le x\le\dfrac{1}{2}\\ x-\dfrac{1}{2} & si\ x\in\mathbb{Q}\ ,\ \dfrac{1}{2}<x<1\\ x & si\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\ ,\ 0<x<1\end{cases}$$

► Étude de la continuité de f.
Soit $m\in[0,1]$

- Si m est un nombre rationnel supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$, on a $f\left(m-\frac{1}{2}\right)=m\left(f\left(x_n\right)\right)$ où $\left(x_n\right)$ est une suite de nombre irrationnels convergente vers $m-\frac{1}{2}$. Il en résulte que f n'est pas continue sur l'ensemble des nombres rationnels supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2}$.
- Si m est un nombre rationnel strictement inférieur à $\frac{1}{2}$, on a $f\left(m-\frac{1}{2}\right)=m$, $\left(f\left(x_n\right)\right)$, où $\left(x_n\right)$ est une suite de nombre irrationnels convergente vers $m+\frac{1}{2}$. Il en résulte que f n'est pas continue sur l'ensemble des nombres rationnels strictement inférieurs à $\frac{1}{2}$.
- Si $m = 0$, on a $f(1)=0$ et toute suite de rationnel tendant vers 1 a pour limite $\frac{1}{2}$; il s'ensuit que f n'est pas continue en 1.
- Si m est un irrationnel, alors $f(m)=m$ et toute suite de rationnels tendant vers m a une limite soit égale à $m+\frac{1}{2}$, soit à $m-\frac{1}{2}$; donc la fonction f n'est pas continue sur l'ensemble des irrationnels de [0, 1] .

Il en résulte finalement, que f n'est continue en aucun point de [0, 1] .

► Montrons que f est bijective

D'après la partie précédente, la fonction est surjective ; montrons qu'elle est injective. Deux rationnels distincts de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ ou de $\left]\frac{1}{2},1\right[$ ont des images distinctes car les restrictions à ces ensembles sont des fonctions affines. Un rationnel de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et un rationnel de $\left]\frac{1}{2},1\right[$ ont des images disttinctes puisque l'une appartient à $\left[\frac{1}{2},1\right]$ et l'autre à $\left]0,\frac{1}{2}\right[$. Deux irrationnels de [0, 1] ont des images distinctes puisque la restriction à cet ensemble est une fonction linéaire. enfin un rationnel et un irrationnel ont des images distinctes puisque l'image d'un rationnel est un rationnel et l'image d'un irrationnel est un irrationnel.

Ainsi la fonction donnée est bijective et discontinue en tout point.

2. Une fonction discontinue en tout point telle que sa valeur absolue soit continue ne peut pas prendre la valeur 0 ; en effet, si $a\in\mathbb{R}$ telle que $f(a)=0$ alors,

$\forall\ \varepsilon>0\ ,\ \exists\ \eta>0\ ,\ |x-a|\leq\eta\ \Rightarrow\ \big||f(x)|-|f(a)|\big|\leq\varepsilon$

Puisque $f(a)=0$, on en déduit que $\big||f(x)|-|f(a)|\big|=|f(x)|=|f(x)-f(a)|$ et la foncton f est
donc continue en 0 .

On choisit donc une fonction ne s'annulant pas, par exemple $x\mapsto e^x$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulle pas ; ce sera la fonction $|f|$; on définit par exemple, la fonction f par :

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x & si\ x\in\mathbb{Q}\\ -\mathrm{e}^x & si\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

Cette fonction prend ces valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $y\in\mathbb{R}^*$,

- si $y > 0$, alors il existe un rationnel x tel que $y = \mathrm{e}^{x}$ et pour toute suite d'irrationnels (x_n) tendant vers x , on a $\left(f\left(x_n\right)\right) = \left(-\mathrm{e}^{Xn}\right)$ qui converge vers $-\mathrm{e}^{x}$. La fonction n'est donc pas continue sur ¤
- si $y < 0$, alors il existe un irrationnel x tel que $y = -\mathrm{e}^{x}$ et pour toute suite de rationnels (x_n) tendant vers x , on a $\left(f\left(x_n\right)\right) = \left(\mathrm{e}^{Xn}\right)$ qui converge vers e^{X} ¡ $-$¤ .

■ Chapitre 11 – Fonctions usuelles

Exercice 1
Résoudre les équations et les inéquations suivantes

a. $4x^3 - 3x + 1 = 0$

b. $4x^3 - 7x + 3 > 0$

c. $|1-2x| - 2|x+3| \leq 1 - 3|1-x|$

d. $\frac{1}{3}\lfloor 1-2x \rfloor = \frac{2}{3} + \left\lfloor \frac{1-2x}{3} \right\rfloor$

e. $\left(\ln(1-2x)\right)^2 = 2\ln\left(4x^2 - 4x + 1\right) - 3$

f. $1 - e^{-2x} \leq a$ (suivant les valeurs de a)

g. $1 - 2\sqrt{x^2 - 5x + 1} \geq x - 3$ (on donne $5+\sqrt{21} \approx 9.58$ et $4+4\sqrt{2} \approx 9.66$)

Méthodes

1. Pour résoudre une (in)équation polynomiale, il convient de toujours rechercher les racines évidentes : $-1,\ 0,\ 1$.

2. Pour résoudre des inéquations polynomiales, on factorise et on fait un tableau de signes.

3. Pour résoudre des inéquations "valeurs absolues", on écrit dans un tableau l'expression sans valeur absolue, suivant les valeurs de la variable.

4. On transforme une équation avec des parties entières en inéquations en utilisant la définition. Si m est un entier naturel non nul et si l'équation fait intervenir $\left\lfloor \frac{u}{m} \right\rfloor$, on pose $\lfloor u \rfloor = mq + r$, avec $r \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$.

5. Pour les (in)équations avec racines carrées, exponentielles ou logarithmes, on peut procéder par analyse-synthèse ; on résout alors l'(in)équation de façon formelle en utilisant les formules et les règles de changement de membre. On vérifie la ou les solutions obtenues

Exercice 2
Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

a. $\ln(2x-1) + 1 > 0$

b. $e^{x+\ln 2} - \frac{1}{e^{x-\ln 2} - 1} \leq 1$

c. $\ln(1-3x) - \ln(x+2) \geq 0$

d. $|2x-1| - 3|1-x| \geq 2 + x$

e. $2\lfloor x-1 \rfloor = 4 + \lfloor x \rfloor$

f. $\frac{\lfloor -(x+1) \rfloor}{2} - \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = 3$

Corrigé Exercice 1

a. Posons $P(x)=4\,x^3-3\,x+1$; on veut résoudre l'équation $P(x)=0$.

C'est une équation polynomiale. On vérifie que −1 est une racine du polynôme :

$4(-1)^3-3(-1)+1=0$.

On peut alors factoriser *P* (*x*) par *x* + 1 :

$$P(x)=(x+1)\left(a\,x^2+b\,x+c\right)$$

Le coefficient du troisième degré est 4, donc *a* = 4 ; le coefficient constant est 1, donc *c* = 1 .
Le polynôme s'écrit donc

$$P(x)=(x+1)\left(4\,x^2+b\,x+1\right)$$

On identifie alors les termes du second degré (ou du premier degré) ; on a $b+4=0$ (ou $b+1=-3$) ; dans les deux cas, on trouve *b* = − 4 . Donc

$$P(x)=(x+1)\left(4\,x^2-4\,x+1\right)$$

On reconnaît une identité remarquable (il est mal vu de ne pas la reconnaître et d'utiliser le discriminant) :

$$P(x)=(x+1)(2\,x-1)^2$$

Finalement l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation est $\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$

b. Posons $P(x)=4\,x^3-7\,x+3$; on veut résoudre l'équation $P(x)>0$.

On vérifie que 1 est une racine du polynôme : $4(1)^3-7(1)+3=0$.

On peut donc factoriser *P* (*x*) par (*x* − 1) :

$$P(x)=(x-1)\left(a\,x^2+b\,x+c\right)$$

Par identification des coefficients du terme du troisième degré d'une part, et du terme constant d'autre part, on a *a* = 4 et *c* = − 3 ; l'identification du terme du second degré nous donne *b* = 4;
le polynôme s'écrit donc

$$P(x)=(x-1)\left(4\,x^2+4\,x-3\right)$$

On détermine les racines de $4\,x^2+4\,x-3$ en utilisant le discriminant ;

$\Delta=16-4\times4\times(-3)=16\times4$ et par suite

$$x_1=\frac{-4-4\times2}{2\times4}=-\frac{3}{2}\quad\text{et}\quad x_2=\frac{-4+4\times2}{2\times4}=\frac{1}{2}$$

Le polynôme s'écrit donc

$P(x)=(x-1)(2\,x+3)(2\,x-1)$

On fait un tableau de signe

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		-		-		-	0	+	
$2\,x+3$		-	0	+		+		+	
$2\,x-1$		-		-	0	+		+	
$P(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\left]-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

c. L'inéquation s'écrit $A(x)\le 1$ avec $A(x)=|1-2x|-2|x+3|+3|1-x|$; commençons par écrire dans un tableau, l'expression sans valeur absolue

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$\|1-2x\|$		$1-2x$		$1-2x$	0	$2x-1$		$2x-1$	
$\|x+3\|$		$-3-x$	0	$x+3$		$x+3$		$x+3$	
$\|1-x\|$		$1-x$		$1-x$		$1-x$	0	$x-1$	
$A(x)$		$A_1(x)$	|	$A_2(x)$	|	$A_3(x)$	|	$A_4(x)$	

Les inéquations sont

i. $A_1(x)\le 1$, $x\le -3$

et $A_1(x)=(1-2x)-2(-3-x)+3(1-x)=10-3x$

On a $x\ge 3$ et $x\le -3$; pas de solution

ii. $A_2(x)\le 1$, $-3\le x\le\frac{1}{2}$

et $A_2(x)=(1-2x)-2(3+x)+3(1-x)=-2-7x$

On a $x\ge -\frac{3}{7}$ et $-3\le x\le\frac{1}{2}$; donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\left[-\frac{3}{7},\frac{1}{2}\right]$

iii. $A_3(x)\le 1$, $\frac{1}{2}\le x\le 1$

et $A_3(x)=(2x-1)-2(3+x)+3(1-x)=-3x-4$

On a $x\ge -\frac{5}{3}$ et $\frac{1}{2}\le x\le 1$; donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[\frac{1}{2},1\right]$

iv. $A_4(x)\le 1$, $x\ge 1$

et $A_4(x)=(2x-1)-2(3+x)+3(x+1)=3x-4$

On a $x\le\frac{5}{3}$ et $x\ge 1$; pas de solution

Finalement, l'ensemble des solutions dans ¡ de l'inéquation est

$$S_{¡}=\left[-\frac{3}{2},1\right]$$

d. L'équation s'écrit $\frac{1}{3}\lfloor 1-2x\rfloor-\left\lfloor\frac{1-2x}{3}\right\rfloor=\frac{2}{3}$. On pose $\lfloor 1-2x\rfloor=3q+r$ avec $q\in ¢$ et $r\in\{0,1,2\}$; l'équation devient

$$q+\frac{r}{3}-q=\frac{2}{3}$$

Il en résulte que $r=2$, quelle que soit la valeur de q . Ainsi $\lfloor 1-2x\rfloor=3q+2$; donc

$$3q+2 \leq 1-2x < 3q+3 \iff 3q+1 \leq -2x < 3q+2$$
et par suite
$$-\frac{3}{2}q-1 < x \leq -\frac{3}{2}q-\frac{1}{2}$$
L'ensemble des solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$ est donc
$$S_{\mathbb{R}} = \bigcup_{q\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{3}{2}q-1,\ -\frac{3}{2}q-\frac{1}{2}\right]$$
bien sûr, on peut aussi écrire, en remplaçant q par $-q$:
$$S_{\mathbb{R}} = \bigcup_{q\in\mathbb{Z}} \left]\frac{3}{2}q-1,\ \frac{3}{2}q-\frac{1}{2}\right]$$
e. L'équation s'écrit $\left(\ln(1-2x)\right)^2 = 2\ln(1-2x)^2 - 3$ ou encore $(\ln u)^2 = 4\ln u - 3$ avec $u = 1-2x$.

Par analyse-synthèse

► Si cette équation admet des solutions, alors
$$X^2 - 4X - 3 = 0 \quad \text{avec} \quad X = \ln u = \ln(1-2x)$$
Résolvons d'abord l'équation $X^2-4X-3=0$; on repère une racine évidente, $X_1 = -1$; il s'ensuit que l'autre racine est $X_2 = 3$ puisque le produit des racines est $X_1X_2 = \frac{c}{a} = -3$.

On doit alors résoudre les deux équations

i. $\ln(1-2x) = -1$

On a $1-2x = \mathrm{e}^{-1}$, donc $x = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-1}}{2}$

ii. $\ln(1-2x) = 3$

on a $1-2x = \mathrm{e}^{3}$, donc $x = \dfrac{1-\mathrm{e}^{3}}{2}$

Les solutions possibles sont donc $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-1}}{2}$ et $\dfrac{1-\mathrm{e}^{3}}{2}$.

► D'après la partie analyse, si l'équation admet des solutions, elles sont nécessairement égales à $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-1}}{2}$ et $\dfrac{1-\mathrm{e}^{3}}{2}$. On vérifie ces deux résultats

On a respectivement, $u = 1-2x$ égal à e^{-1} et à e^{3}; donc les logarithmes $\ln u$ existent et sont respectivement égaux à –1 et 3.

Enfin, $(\ln u)^2 - 2\ \ln\ u^2 - 3 = (\ln u)^2 - 4\ln u - 3$ est nulle pour chacune de ces valeurs de $\ln u$.

Donc, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation est
$$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1-e^{-1}}{2}, \frac{1-e^{3}}{2}\right\}$$
f. Soit a un réel ; l'équation, directement issue d'un exercice de probabilités, s'écrit $1-\mathrm{e}^{-2x} \leq a$ ou encore $\mathrm{e}^{-2x} \geq 1-a$

- Si $1-a \leq 0$, c'est-à-dire si $a \geq 1$, toute valeur de x convient car $\mathrm{e}^{-2x} > 0$.
- Si $1-a > 0$, alors $-2x \geq \ln(1-a)$ et donc $x \leq -\frac{1}{2}\ln(1-a)$

L'ensemble des solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$ est donc

- si $a \geq 1$, $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

- si $a<1$, $S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\ln(1-a)\right]$

g. L'inéquation est équivalente à $2\sqrt{x^2-5x+1} \leq -x+4$
Par analyse-synthèse
► Si l'inéquation admet des solutions, elles vérifient l'inéquation

$$4\left(x^2-5x+1\right) \leq (-x+4)^2 \iff 3x^2-12x-12 \leq 0$$

Après simplification par 3 , l'inéquation s'écrit

$$x^2-4x-4 \leq 0$$

Les racines de cette équation sont $2-2\sqrt{2}$ et $2+2\sqrt{2}$; si l'inéquation admet des solutions, elles sont nécessairement dans l'intervalle $\left[2-2\sqrt{2}\,,\,2+2\sqrt{2}\right]$.

► Les solutions de l'inéquation sont les éléments x de $\left[2-2\sqrt{2}\,,\,2+2\sqrt{2}\right]$ pour lesquels $x^2-5x+1 \geq 0$.

Or $x^2-5x+1 \geq 0$ si, et seulement si, $x \in \left]-\infty, \frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21}\right[\cup \left]\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21}, +\infty\right[$ (résolution laissée au soin du lecteur : on calcule les racines et le signe du trinôme est positif à l'extérieur des racines)

- Les deux nombres $2-2\sqrt{2}$ et $2+2\sqrt{2}$ sont de signes contraires puisque leur produit est négatif, égal à -4 ; donc $2-2\sqrt{2} < 0 < 2+2\sqrt{2}$.
- Les deux nombres $\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21}$ et $\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21}$ sont de même signe puisque leur produit est égal

1. Il s'ensuit que $0 < \frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21} < \frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21}$

Reste donc à comparer $\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21}$ et $2+2\sqrt{2}$ ou encore $5+\sqrt{21}$ et $4+4\sqrt{2}$; l'énoncé nous dit que $5+\sqrt{21} \approx 9.58$ et $4+4\sqrt{2} \approx 9.66$; il s'ensuit qu'on a :

$$2-2\sqrt{2} < \frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21} < \frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21} < 2+2\sqrt{2}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation dans $\mathbb{R}$ est

$$S_{\mathbb{R}} = \left[2-2\sqrt{2}, \frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21}\right] \cup \left[\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21}, 2+2\sqrt{2}\right[$$

Corrigé Exercice 2
a. L'équation s'écrit

$$\ln(2x-1) \geq -1 \;\Rightarrow\; 2x-1 \geq \mathrm{e}^{-1}$$

Il s'ensuit que $x \geq \frac{1+\mathrm{e}^{-1}}{2}$. Réciproquement, si $x \geq \frac{1+\mathrm{e}^{-1}}{2}$, alors $2x-1 \geq \mathrm{e}^{-1} > 0$, donc son logarithme existe et, par croissance du logarithme, $\ln(2x-1) \geq -1$.
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation est donc

$$S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{1+\mathrm{e}^{-1}}{2}, +\infty\right[$$

b. L'inéquation s'écrit

$$\left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^x - \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{-\ln 2}\right)^x - 1} \leq 1 \iff 2^x - \frac{1}{\frac{1}{2^x} - 1} \leq 1$$

ou encore :

$$2^x - \frac{2^x}{1-2^x} \leq 1 \iff -\frac{2^{2x}}{1-2^x} \leq 1 \text{ soit } \frac{2^{2x}}{2^x - 1} \leq 1$$

1^{er} cas : $2^x - 1 > 0$, c'est-à-dire $x > 0$

L'inéquation s'écrit

$$\left(2^x\right)^2 - 2^x + 1 \leq 0 \text{ c'est-à-dire } X^2 - X + 1 \leq 0 \text{ pour } X = 2^x$$

Cette inéquation n'a pas de solution puisque, pour tout réel X , $X^2 - X + 1 > 0$.

2^e cas : $2^x - 1 < 0$, c'est-à-dire $x < 0$

L'inéquation s'écrit

$$\left(2^x\right)^2 - 2^x + 1 \geq 0 \text{ c'est-à-dire } X^2 - X + 1 \geq 0 \text{ pour } X = 2^x$$

L'inégalité $X^2 - X + 1 \geq 0$ est vérifiée pour tout rél X , donc pour tout réel $x < 0$.

Finalement l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$S_{\mathrm{i}} = \left]-\infty, 0\right[$$

c. L'inéquation s'écrit $\ln(1-3x) \geq \ln(x+2)$.

On notera d'abord que si cette inéquation a des solutions, alors $1-3x > 0$ et $x+2 > 0$, donc $x \in \left]-2, \frac{1}{3}\right[$.

Dans cet ensemble, par croissance de la fonction ln, l'inéquation est équivalente à $1-3x \geq x+2$ et donc $x \leq -\frac{1}{4}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc

$$S_{\mathrm{i}} = \left]-2, -\frac{1}{4}\right]$$

d. L'inéquation est équivalente à $A(x) \geq 2$ avec $A(x) = |2x-1| - 3|1-x| - x$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$\lvert 1-2x \rvert$		$1-2x$	0	$2x-1$		$2x-1$	
$\lvert 1-x \rvert$		$1-x$		$1-x$	0	$x-1$	
$A(x)$		$A_1(x)$	$\vert$	$A_2(x)$	$\vert$	$A_3(x)$	

Les inéquations sont respectivement

i. $A_1(x) \geq 2$ et $x \leq \frac{1}{2}$

avec $A_1(x) = (1-2x) - 3(1-x) - x = -2$; il n'y a aucune solution

ii. $A_2\left(x\right) \geq 2$ et $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$

avec $A_2\left(x\right) = \left(2\,x - 1\right) - 3\left(1 - x\right) - x = 4\,x - 4$. On obtient $x \geq \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$; là encore, il n'y a pas de solution

iii. $A_3\left(x\right) \geq 2$ et $x \geq 1$

avec $A_3\left(x\right) = \left(2\,x - 1\right) - 3\left(x - 1\right) - x = -2\,x + 2$. On obtient $x \leq 0$ et $x \geq 1$, ce qui est aussi impossible

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$.

e. L'équation s'écrit $2\lfloor x - 1 \rfloor - \lfloor x \rfloor = 4$ ou encore $2\left(\lfloor x \rfloor - 1\right) - \lfloor x \rfloor = 4$; après réduction, $\lfloor x \rfloor = 6$ et donc l'ensemble des solutions de cette équation est $S_{\mathbb{R}} = \left[6, 7\right[$.

f. Posons $\lfloor x + 1 \rfloor = 2\,q + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \left\{0, 1\right\}$. On a $2\,q + r \leq x + 1 < 2\,q + r + 1$ donc $-2\,q - r - 1 < -\left(x + 1\right) \leq -2\,q - r$ et donc

$$\lfloor -\left(x + 1\right) \rfloor = \begin{cases} -2\,q - r - 1 & si\ 2\,q + r - 1 < x < 2\,q + r \\ -2\,q - r & si\ x = 2\,q + r - 1 \end{cases}$$

Par ailleurs,

$$2\,q + r \leq x + 1 < 2\,q + r + 1 \text{ donc } q + \frac{r}{2} \leq \frac{x + 1}{2} < q + \frac{r + 1}{2}$$

Donc $\left\lfloor \dfrac{x + 1}{2} \right\rfloor = q$

1er cas : si $x \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \left\{0, 1\right\}$ tel que $x = 2\,q + r - 1$, alors l'équation s'écrit :

$$-q - \frac{r}{2} - q = 3 \iff \frac{r}{2} = -2q - 3$$

Comme q est un entier, $-2\,q - 3$ est un entier et $r \in \left\{0, 1\right\}$ donc $\dfrac{r}{2} \in \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$; il s'ensuit que r = 0 et $\dfrac{r}{2} = 0$. Par suite, $-2\,q - 3$, ce qui est impossible.

2^{e} cas : si $x \notin \mathbb{Z}$, c'est-à-dire s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \left\{0, 1\right\}$ tel que $2\,q + r - 1 < x < 2\,q + r$, alors l'équation s'écrit :

$$-q - \frac{r + 1}{2} - q = 3 \iff \frac{r + 1}{2} = -2\,q - 3$$

Comme q est un entier, $-2\,q - 3$ est un entier et $r \in \left\{0, 1\right\}$ donc $\dfrac{r + 1}{2} \in \left\{\dfrac{1}{2}, 1\right\}$; il s'ensuit que $r = 1$ et $\dfrac{r + 1}{2} = 1$. Par suite, $-2\,q = 4$, et donc $q = -2$. Par suite $-4 < x < -3$. L'ensemble des solutions de cette équation est $S_{\mathbb{R}} = \left]-4, -3\right[$.

Exercice 1

Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = 0$$

Corrigé Exercice 1

Cet exercice porte sur l'étude de sommes de Riemann.
1.

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$$

On modifie l'écriture de u_n pour se ramener au modèle du cours :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k/n}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

On pose alors

$$\forall x\in[0;1], f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

D'après le cours, u_n est une somme de Riemann associée à la fonction f. Cette fonction est continue sur $[0;1]$, donc la suite (u_n) est convergente de limite $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

On calcule

$$I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$I = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

On peut alors conclure :

$$\lim_{x\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}\ln 2$$

2.

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$$

On modifie l'écriture de u_n pour se ramener au modèle du cours :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}}$$

On pose alors :

$$\forall x \in [0;1], f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$$

D'après le cours, u_n est une somme de Riemann associée à la fonction f. Cette fonction est continue sur $[0;1]$ donc la suite (u_n) est convergente de limite $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

On calcule

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\mathrm{d}x$$

$$I = \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \sqrt{3} - 1$$

On peut alors conclure :

$$\lim_{x \to +\infty} u_n = \sqrt{3} - 1$$

Exercice Scilab 1

Soit N un entier naturel non nul. Une urne contient N boules blanches et N boules noires. On effectue dans cette urne des tirages successifs sans remise jusqu'à l'obtention de toutes les boules noires.
Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage de la dernière boule noire.

1. Écrire un programme renvoyant les distributions empiriques et théoriques de la variable X.
2. Déterminer la loi de X ; vérifier qu'on se définit bien une loi de probabilité.
3. Calculer éventuellement son espérance.
4. On suppose maintenant que toutes les boules sont numérotées de 1 à $2N$. Les boules numérotées de 1 à N sont les boules blanches et les boules numérotées de $N+1$ à $2N$ sont les boules noires. On extrait toutes les boules de l'urne et on note les numéros des boules dans l'ordre où elles sortent.
Écrire un bloc d'instructions demandant à l'utilisateur de rentrer la valeur de N, puis afficher sur la console la liste des boules tirées et le rang de la dernière boule noire tirée sans utiliser l'instruction **`grand(…, " prm ",…)`**.

Exercice Scilab 2 – Paradoxe de Penney
Écrire un bloc d'instructions pour simuler la situation suivante :
• N expériences consistant en jets d'une pièce équilibrée (N > 10), jusqu'à l'obtention d'une séquence PPF ou FPP ;
• Affichage des jets obtenus lors des 10 premières expériences ;
• Affichage des compteurs du nombre de succès de chacune des séquences à l'issue des N expériences, ainsi que de leurs fréquences empiriques.
Que constate-t-on ?

Corrigé exercice Scilab 1
1. Par exemple,
```
//Une urne contient 2N boules : N blanches et N noires. On tire
au
hasard une à une toutes les boules de l'urne et on note X le
numéro du
tirage où on a obtenu la dernière boule noire. On simule ici X
dans le
but d'obtenir une approximation de sa loi et de son espérance.
clc;clf;clear
s=getdate("s") // Initialisation de rand
rand("seed",s)
N=5
function CB=binom(n,p) //Coeff binomiaux
bin = [1 cumprod((n:-1:1)./(1:n))]; // matrice ligne [1 n n*
(n-1)/2 ...]
CB=bin(p+1) // Coeff "p parmi n"
endfunction
function y=X(N) // Cette fonction simule la v.a. X
```

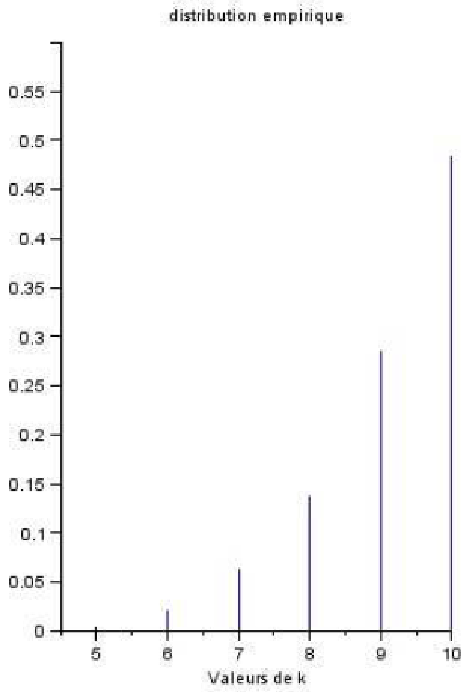
```
Nb_N=N // L'urne contient initialement N noires
Nb_B=N // et N blanches
Tirage=0 // numéro de tirage
while Nb_N>=1
//Tirage d'une boule
Tirage=Tirage+1
if rand()<Nb_N/(Nb_B+Nb_N) then // On prend une noire
Nb_N=Nb_N-1
else // On prend une blanche
Nb_B=Nb_B-1
end
end
y=Tirage
endfunction
// ---------------------------------
// Représentation de l'histogramme : loi empirique
Nb_E=1000 // nombre d'expériences
for i=1:Nb_E
U(i)=X(N)
end // U=E-échantillon de $X$
// Distribution empirique
subplot(1,2,1)
y=tabul(U,"i") // Les data sont regroupés dans l'ordre
croissant de
5 à 10
plot2d3(y(:,1),y(:,2)/Nb_E, rect=[N-0.5,0,2*N,0.6],style=2); //
y
(:,1) est la matrice des valeurs de U, y(:,2) est la matrice du
nbre
d'occurrences de chacune de ces valeurs
xtitle('distribution empirique', "Valeurs de k") // Titre
a=get("current_axes") // paramètre de la distribution (gca)
a.font_size=1
a.x_location="bottom"
a.y_location="left";
// Approximation de E(X) par la moyenne empirique
Moy=mean(U) // Moyenne empirique de X
disp(Moy,"Moyenne empirique : ")
disp(N*(2*N+1)/(N+1),"Espérance : ") // Espérance de la loi
// Loi théorique
L=[]
for k=N:2*N
L=[L,binom(k-1,N-1)] // Matrice ligne des numérateurs des
probabilités
end
L=L/binom(2*N,N) // Matrice ligne de la loi de probabilité de X
subplot(1,2,2)
x=N:2*N
plot2d3(x, L, rect=[N-0.5,0,2*N,0.6],style=5);
a=get("current_axes")
a.font_size=1
a.x_location="bottom";
xtitle("Distribution théorique", "Valeurs de k", "P(X=k)") //
Titre
de la représentation graphique
```

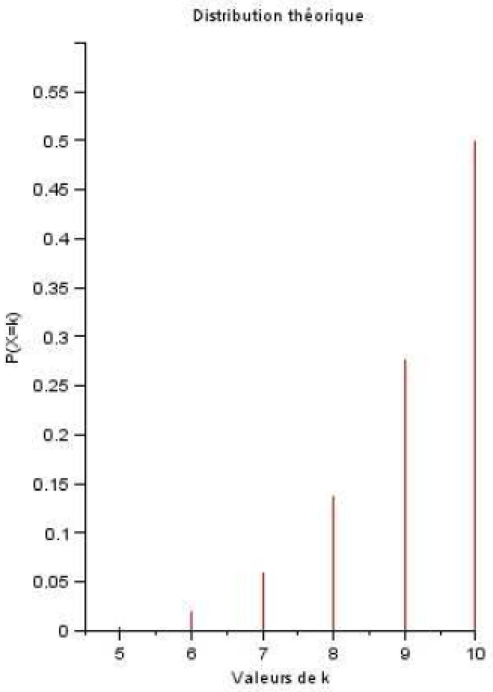
Affichage sur la console

```
Moyenne empirique :
```

```
9.131
Espérance :
9.1666667
```

Représentation graphique





2. On effectue le tirage de toutes les boules de l'urne et on note X le rang d'apparition de la dernière noire, c'est-à-dire du dernier 1 dans la liste tirage effectué de la question précédente. On a : $X(\Omega) = [\![n, 2n]\!]$.

Il y a $\binom{2n}{n}$ façons de placer n numéro 1 dans une $2n$-liste.

• L'événement $(X = n)$ correspond à un seul tirage : obtenir d'abord toutes les boules noires ;

$$P(X = n) = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

• Pour $k \geq n$, l'événement $(X \leq k)$ est réalisé si, et seulement si, on a placé n chiffres 1 dans une liste de k chiffres.

$$P(X \leq k) = \frac{\binom{k}{n}}{\binom{2n}{n}}$$

Pour $k = 2n$, on a bien $P(X \leq 2n) = 1$. Immédiatement, pour $k \geq n + 1$,

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{k}{n} - \binom{k-1}{n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$$

On notera que cette relation est bien vérifiée aussi pour $k = n$; elle définit bien une loi de probabilité si

$$\sum_{k=n}^{2n} P(X = k) = 1$$

Or,

$$\sum_{k=n}^{2n} P(X = k) = \sum_{k=n}^{2n} \big(P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)\big) = P(X \leq 2n) - P(X \leq n - 1)$$

Donc,

$$\sum_{k=n}^{2n} P(X = k) = P(X \leq 2n) = 1$$

On retrouve ainsi la formule de Pascal généralisée.

3. La variable aléatoire étant discrète finie, elle possède une espérance et on a :

$$E(X) = \sum_{k=n}^{2n} k \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=n}^{2n} n \frac{\binom{2n+1}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n(2n+1)}{n+1}$$

En remarquant que

$$E(X) = 2n - 1 - \frac{1}{n+1}$$

on voit que l'espérance est assez proche de $2n - 1$ pour des valeurs de n « assez grandes ».

4. Par exemple :

```
n=input("Nombre de boules noires initialement : ")
B=1:2*n // Urne de Banach ; les numéros n+1 à 2*n sont les
boules
noires
L=zeros(B) // Liste des tirages ; initialement, on suppose
qu'on a
tiré 2*n boules blanches
y=zeros(B) // Permutations des éléments de B
j=0 // compteur de boules noires
rg=0 // rang d'obtention de la dernière boule noire
for k=1:2*n
a=grand(1,1,'uin',1,2*n+1-k) // Tirage aléatoire d'un élément
dans une liste de 2*n+1-k éléments de E pas encore sortis
y(k)=B(a) // On affecte à y(k) la valeur de B(a)
if y(k)>n then rg=k
end
B(a)=B(2*n+1-k) // On remplace la valeur de B(a) par la
dernière valeur de liste
end
disp(y,"Permutation des éléments de E :")
disp(L=floor(y/(n+1)),"Tirage effectué")
disp(rg, 'rang d''apparition de la dernière boule noire :')
```

Sur la console pour $n = 15$

```
Nombre de boules noires initialement : 15
column 1 to 13
```

```
14. 22. 20. 28. 4. 23. 1. 18. 25. 24.
6. 2. 21.
column 14 to 26
16. 29. 15. 8. 26. 10. 5. 11. 19. 17.
27. 13. 9.
column 27 to 30
30. 7. 12. 3.
Tirage effectué
column 1 to 15
0. 1. 1. 1. 0. 1. 0. 1. 1. 1. 0.
0. 1. 1. 1.
column 16 to 30
0. 0. 1. 0. 0. 0. 1. 1. 1. 0. 0.
1. 0. 0. 0.
rang d'apparition de la dernière boule noire :
27.
```

Corrigé exercice Scilab 2

On peut naturellement penser que les deux séquences sont équivalentes ; il n’en est rien comme en témoigne la simulation faite dans Scilab.

Dans SciNotes :

```
// On jette une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention d'une des
deux
séquences PPF ou FPP.
// Dans ce programme, Pile est notée 1 et Face est notée 0 ; la
séquence PPF au rang "c" est donc équivalente à R(c-2)*R(c-
1)*(1-R(c)
)=1 et la séquence FPP au rang "c" est équivalente à (1-R(c-
2))*R
(c-1)*R(c)=1
clear;clc; // Suppression des variables et effaçage de la
console
disp(" Paradoxe de PENNEY")
disp("")
disp("Affichage du nombre de succès et des moyennes de chacune
des
séquences PPF et FPP")
N=input("Nombre d''expériences (N>10) : ")
disp("A titre d''exemple, affichage des résultats des 10
premières
expériences ; la première colonne (C1) est le numéro de
l''expérience
")
a=0 ; b=0 ; // a et b compteurs du nombre de succès de la
séquence
PPF et FPP
for k=1:N
R=grand(1,3,"uin",0,1) // matrice des résultats des lancers : 0
pour face et 1 pour pile
c=3 // Initialisation du compteur de nombre de lancers pour
obtenir un succès
while (1-R(c-2))*R(c-1)*R(c)+R(c-2)*R(c-1)*(1-R(c))==0
c=c+1
R=[R,grand(1,1,"uin",0,1)]
end
```

```
if (1-R(c-2))*R(c-1)*R(c)~=0 then a=a+1
else b=b+1
end
if k<=10 then disp([k,R])
end
end
disp("-----------------------")
disp("Pour le nombre N d''expériences :")
disp([a,b;a/(a+b),b/(a+b)],"Compteur du nombre de succès et
fréquences
; C1, séquence FPP ; C2, séquence PPF ")
```

Sur la console :

```
Paradoxe de PENNEY
Affichage du nombre de succès et des moyennes de chacune des
séquences PPF et FPP
Nombre d'expériences (N>10) : 10000
A titre d'exemple, affichage des résultats des 10 premières
expériences ; la première colonne (C1) est le numéro de
l'expérience
1. 1. 1. 1. 1. 1. 0.
2. 1. 1. 0.
3. 0. 0. 1. 1.
4. 1. 0. 0. 0. 1. 0. 1. 1.
5. 1. 0. 0. 1. 1.
6. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 0.
7. 1. 0. 1. 0. 1. 0. 1. 1.
8. 1. 1. 1. 1. 0.
9. 0. 1. 0. 1. 1.
10. 0. 1. 1.
-----------------------
Pour le nombre N d'expériences :
Compteur du nombre de succès et fréquences ; C1, séquence FPP ;
C2,
séquence PPF
7427. 2573.
0.7427 0.2573
```

La séquence FPP semble apparaître trois fois plus souvent que la séquence PPF.
Cela peut se comprendre par le fait que pour gagner avec une séquence PPF, avant les deux P, on ne peut avoir que des P (expériences 1, 2, 6, 8) ; c'est donc nécessairement une suite de la forme P…PPF, tandis qu'on peut gagner avec une séquence FPP de beaucoup de façons : devant le F, il ne peut y avoir que des F, mais aussi des suites FPF, FPFF, … (expériences 3, 4, 5, 7, 9).